
Het modelleren van een onvolkomen put met een meerlagenmodel

Mark Bakker

Een onvolkomen put kan gemodelleerd worden met een meerlagenmodel door het watervoerend pakket op te delen in drie lagen gescheiden door fictieve weerstandslagen, waarbij de dikte van de middelste laag gelijk is aan de lengte van het filter van de put. De weerstand van de weerstandslagen moet door de modelleur gespecificeerd worden. Een regel is afgeleid voor het kiezen van de weerstand door het vergelijken van de exacte en benaderende oplossing voor de stroming naar een geul in een dwarsdoorsnede.

Inleiding

De meeste softwarepakketten voor het modelleren van meerlagensystemen (MICRO-FEM, MLAEM, MODFLOW, TRIWACO) bieden de mogelijkheid tot het modelleren van volkomen putten, maar hebben geen aparte optie voor het modelleren van onvolkomen putten. Gelukkig wordt er vaak zoveel water uit een onvolkomen put gepompt dat deze als volkomen gemodelleerd kan worden. Als dit niet het geval is, of als men juist geïnteresseerd is in het effect van de onvolkomenheid, dan is het aan de modelleur om een oplossing te vinden. Een veel gebruikte oplossing is het opdelen van het watervoerend pakket in drie lagen, gescheiden door fictieve weerstandslagen met dikte nul; de verticale weerstand van de aquifer wordt als het ware in de fictieve laag gebundeld. De dikte van de middelste laag is gelijk aan de lengte van het filter van de put die dan dus als volkomen gemodelleerd kan worden. De vraag is nu wat voor waarde voor de weerstand van de fictieve weerstandslagen gekozen moet worden. Als vuistregel wordt de weerstand vaak gelijk gekozen aan de helft van de verticale weerstand van de laag waar het filter niet in zit. De gedachte hier achter is dat water gemiddeld de helft van deze laag moet overbruggen (in verticale richting) om de put te bereiken.

In dit korte artikel wordt bekeken hoe goed deze vuistregel is door het bestuderen van de stroming naar een geul in een verticale doorsnede. Het dient echter opgemerkt te worden dat Haitjema (1985) een techniek ontwikkeld heeft, die het mogelijk maakt om de driedimensionale stroming naar een onvolkomen put op eenvoudige en elegante wijze in de hiervoor genoemde Dupuit-modellen in te bouwen, mits de aquifer horizontaal en confined is. Deze oplossing is beschikbaar in het éénlaags model GFLOW (zie ook Haitjema, 1995).

Mark Bakker is werkzaam bij het Department of Civil Engineering, University of Nebraska, Omaha, NE 68182, U.S.A. E-mail: mbakker@cwis.unomaha.edu.

Stroming naar een geul

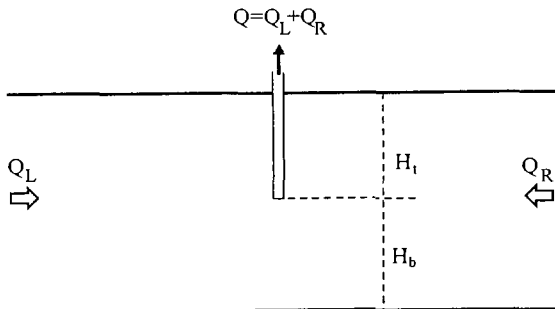
In plaats van stroming naar een onvolkomen put wordt de stroming naar een lange geul in een horizontaal, homogeen, afgesloten watervoerend pakket bestudeerd. De geul penetreert de aquifer over een dikte H_t ; de afstand tussen de bodem van de geul en de bodem van de aquifer is H_b ; de dikte van de aquifer is $H = H_t + H_b$, en de doorlatendheid is k (zie figuur 1). Een debiet Q_L per lengte-eenheid van de geul (loodrecht op het stromingsvlak) stroomt aan de linkerkant richting geul en een hoeveelheid Q_R aan de rechterkant. Ver van de put is het debiet gelijkmatig over de dikte van het pakket verdeeld. Er wordt een hoeveelheid water $Q = Q_L + Q_R$ uit de geul gepompt. De exacte oplossing voor dit probleem kan verkregen worden met behulp van conforme afbeeldingen (Strack, 1989, sec. 32). De resultaten van de exacte oplossing worden hier verder zonder afleiding gebruikt.

In dit geval kan de stroming naar de geul benaderd worden door het watervoerend pakket op te delen in slechts twee lagen met respectievelijk dikte H_t en H_b , en gescheiden door een weerstandslaag met weerstand c en dikte nul. De stijghoogte in de bovenste laag wordt aangeduid met ϕ_t en in de onderste laag met ϕ_b . Het tweetal differentiaalvergelijkingen dat de stroming in dit tweelagensysteem beschrijft is:

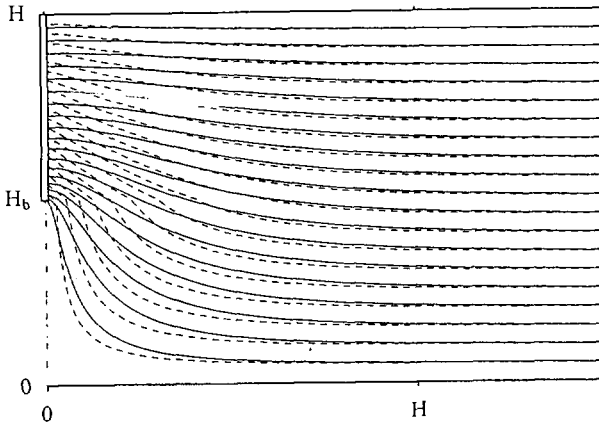
$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_t &= \frac{\phi_t - \phi_b}{c k H_t} \\ \nabla^2 \phi_b &= \frac{\phi_b - \phi_t}{c k H_b} \end{aligned} \quad (1)$$

De debietsvector in de bovenste laag is $Q_{xt} = -kH_t d\phi_t/dx$ en in de onderste laag Q_{xb} . De randvoorwaarden zijn als volgt:

$$\begin{aligned} x = -\infty \quad Q_{xt} &= \frac{Q_L H_t}{H} & Q_{xb} &= \frac{Q_L H_b}{H} \\ x = \infty \quad Q_{xt} &= -\frac{Q_R H_t}{H} & Q_{xb} &= -\frac{Q_R H_b}{H} \end{aligned} \quad (2)$$



Figuur 1: Doorsnede



Figuur 2: Exacte stroomlijnen (getrokken) en benaderende (gestreept) voor het symmetrische geval

De debietsvector is discontinu in de bovenste laag ter hoogte van de geul ($x = 0$)

$$Q_{x_t}(0^+) - Q_{x_t}(0^-) = Q \quad (3)$$

maar is continu in de onderste laag; de stijghoogte is continu in beide lagen.

De oplossing voor dit probleem kan verkregen worden door het volgen van een standaard methode (zie bijvoorbeeld Strack, 1989, sec. 15). Algemene methoden voor het berekenen van stroming in meerlagensystemen zijn gepubliceerd door onder anderen Hemker (1984) en Maas (1988). De oplossing voor het stelsel differentiaalvergelijkingen (1) en de gegeven randvoorwaarden is:

$$\begin{aligned} x \leq 0 \quad \phi_t &= -\frac{(Q_L + Q_R)H_b \lambda}{2kH_t H} e^{x/\lambda} - \frac{Q_L}{kH} x + C & \phi_b &= \frac{(Q_L + Q_R)\lambda}{2kH} e^{x/\lambda} - \frac{Q_L}{kH} x + C \\ x \geq 0 \quad \phi_t &= -\frac{(Q_L + Q_R)H_b \lambda}{2kH_t H} e^{-x/\lambda} + \frac{Q_R}{kH} x + C & \phi_b &= \frac{(Q_L + Q_R)\lambda}{2kH} e^{-x/\lambda} + \frac{Q_R}{kH} x + C \end{aligned} \quad (4)$$

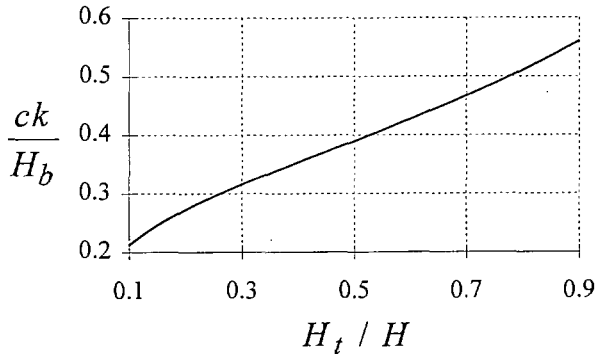
waar de lekfactor λ gelijk is aan:

$$\lambda = \left(\frac{1}{ckH_t} + \frac{1}{ckH_b} \right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{ckH_t H_b}{H}} \quad (5)$$

en waar C een constante is die naar believen gekozen kan worden.

Keuze van de weerstand

Dit brengt ons terug bij de vraag hoe de weerstand van de fictieve weerstandslaag gekozen moet worden. Het symmetrische geval wordt eerst bestudeerd ($Q_L = Q_R$). Hoewel de stijghoogte in de twee lagen constant is in de verticaal, kunnen twee-dimensionale stroomlijnen



Figuur 3: Weerstand fictieve laag versus diepte van geul

toch uitgerekend worden door toepassing van de continuïteitsvergelijking (Strack, 1984). Figuur 2 geeft de exacte stroomlijnen (getrokken lijnen) en de benaderende (gestreepte lijnen) aan de rechter kant van de geul voor het geval dat $H_t = H_b$, $c = H_b/(2k)$ en dus $\lambda = H_b/2$. Zichtbaar is dat de stroomlijnen van de exacte en benaderende oplossing vrijwel gelijk zijn op zo'n anderhalf keer de dikte van het pakket van de geul (een afstand van 3λ).

Zoals verwacht zorgt de geul alleen voor een lokale verandering van de stroomlijnen. Op enige afstand van de geul is de stroming uniform en is de stijghoogte een lineaire functie van de afstand. De gedeeltelijke insnijding van de geul zorgt voor een extra verlaging van de stijghoogte nabij de geul. De gedachte is nu om de weerstand van de fictieve laag zo te kiezen dat de extra verlaging van de stijghoogte in de bovenste laag gelijk is aan de extra verlaging in de exacte oplossing. Dit heeft tot gevolg dat als de totale stroming naar de geul berekend wordt uit het verschil tussen de stijghoogte in de geul en een stijghoogte op enige afstand, dat dan het berekende debiet gelijk is aan het debiet van de exacte oplossing.

Als de exacte oplossing op een punt (x,y) wordt aangeduid met $\phi_{ex}(x,y)$ dan kan c bepaald worden door het verschil in stijghoogte tussen de geul ($x = 0$) en een punt op enige afstand van de geul (zeg $x = \alpha H$) gelijk te stellen in de exacte en de benaderende oplossing:

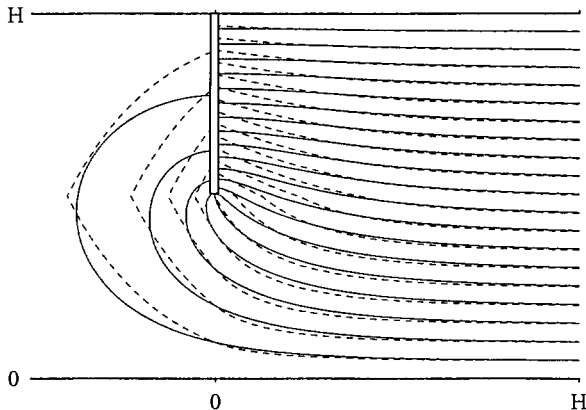
$$\phi_{ex}(\alpha H, H) - \phi_{ex}(0, H) = \phi_t(\alpha H) - \phi_t(0) \quad (6)$$

Gebruik makend van (4) met $Q_L = Q_R = Q/2$ en $e^{-\alpha H/\lambda} \approx 0$ geeft na enige algebra:

$$\lambda = \left[\phi_{ex}(\alpha H, H) - \phi_{ex}(0, H) - \frac{\alpha Q}{2k} \right] \frac{k H_t H}{Q H_b} \quad (7)$$

De waarde van c kan berekend worden met (5) als λ bekend is.

Figuur 3 geeft de relatie tussen de weerstand van de fictieve laag gedeeld door de verticale weerstand van de onderste laag ($c k/H_b$) als een functie van de diepte van de geul gedeeld door de dikte van het pakket (H_t/H). De vuistregel die in de inleiding genoemd werd suggereert een waarde van $ck/H_b = 0,5$. (De grafiek is berekend met $\alpha = 5$ hetgeen resulteert in waarden voor λ die kleiner zijn dan $H/4$ zodat de benadering $e^{-5H/\lambda} = 2 \cdot 10^{-9} \approx 0$ acceptabel is.)



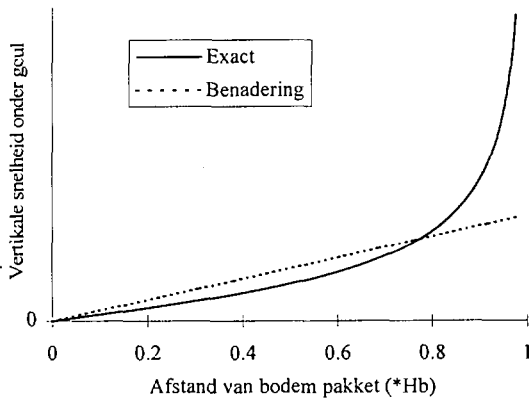
Figuur 4: Exacte stroomlijnen (getrokken) en benaderende (gestreept) voor het asymmetrische geval

De oplossing voor het asymmetrische geval, als de geul al zijn water van één kant krijgt, bijvoorbeeld van rechts, kan verkregen worden door het optellen van een uniforme-stromingsterm $\phi_s = \phi_b = Q_s/(2kH)$ bij de symmetrische oplossing; dit geldt voor zowel de exacte als de benaderende oplossing. Deze term is eenvoudigweg een hoeveelheid water $Q/2$ die gelijkmatig over het pakket verdeeld van rechts naar links stroomt. De stroomlijnen voor het asymmetrische geval zijn te zien in figuur 4. Omdat de stroming voor het asymmetrische geval gelijk is aan het symmetrische geval plus een uniforme stroming is de grafiek in figuur 3 geldig voor zowel het symmetrische en het asymmetrische geval als alle daar tussenliggende gevallen. Het is interessant om te zien dat een hoeveelheid $QH_b/(2H)$ aan de linkerkant de geul binnenstroomt, zelfs als al het water van rechts komt (dat wil zeggen dat de helft van het water in de onderste laag onder de geul door stroomt en aan de andere kant binnenstroomt).

Evaluatie

Figuur 3 laat zien dat er een bijna lineaire relatie bestaat tussen de weerstand van de fictieve weerstandslaag en de relatieve insnijding van de geul. De waarde die gesuggereerd wordt door de vuistregel (0,5) blijkt alleen redelijk te zijn als de geul zo'n drie kwart van het pakket doorsnijdt. De beschreven analyse kan herhaald worden voor de stroming naar een onvolkomen put. De benaderende oplossing bestaat dan uit een som van Besselfuncties en kan vergeleken worden met de oplossing van Haitjema (1985).

Tot slot nog een waarschuwing. Hoewel de vergelijking tussen de exacte en benaderende stroomlijnen verrassend goed is (figuren 2 en 4) is enige voorzichtigheid geboden als de snelheden in de buurt van de geul belangrijk zijn. De verticale snelheden recht onder de geul (die belangrijk kunnen zijn voor bijvoorbeeld het berekenen van de upconing van zout grondwater) kunnen sterk afwijken van de snelheden van de exacte oplossing. De verticale snelheid van de exacte oplossing varieert van nul aan de basis tot oneindig bij de geul, terwijl de snelheid berekend met de benaderende oplossing lineair varieert van nul tot een eindige waarde bij de bodem van de geul (zie figuur 5).



Figuur 5: Verticale snelheid onder de geul

Verantwoording

Dit artikel is gebaseerd op onderzoek verricht aan de University of Minnesota onder coöperatieve agreement CR-823718 met de U.S. Environmental Protection Agency.

Literatuur

- Haitjema, H.M. (1985)** Modeling three-dimensional flow in confined aquifers by superposition of both two- and three-dimensional analytic functions; in: *Water Resources Research*, jrg 21, pag 1557-1566.
- Haitjema, H.M. (1995)** Analytic element modeling of groundwater flow; Academic Press.
- Hemker, C.J. (1984)** Steady groundwater flow in leaky multiple-aquifer systems; in: *Journal of Hydrology*; nr 72, pag 355-374.
- Maas, C. (1988)** The use of matrix differential calculus in problems of multiple-aquifer flow; in: *Journal of Hydrology*, nr 99, pag 43-67.
- Strack, O.D.L. (1984)** Three-dimensional streamlines in Dupuit-Forchheimer models; in: *Water Resources Research*, jrg 20, nr 7, pag 812-822.
- Strack, O.D.L. (1989)** Groundwater mechanics; Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.