
Over grondwatergetijden

Kees Maas

De bestaande formules voor grondwatergetijden hebben elk hun eigen beperkt geldigheids-traject. Omdat de beperkingen geformuleerd zijn in termen van bodemconstanten die je van te voren gewoonlijk niet kent, en die je uit een conventioneel getijdenonderzoek ook niet te weten komt, is het lastig om in een concrete situatie de juiste formule te kiezen. Bovendien blijken de formules gezamenlijk niet alle Nederlandse omstandigheden af te dekken. In dit artikel presenteer ik een nieuwe formule, die dat wel doet. Hij incorporeert de bestaande formules, zodat ook het probleem van het kiezen van de juiste formule komt te vervallen. Overigens beperkt de nieuwe formule zich – net als de reeds bestaande – tot één watervoe-rende laag.

1 Inleiding

De wiskundige behandeling van de voortplanting van getijden in het grondwater van kustgebieden gaat tenminste terug tot Forchheimer (Forchheimer, 1919), die tijdens een zitting van de Oostenrijkse Akademie der Wissenschaften het geval besprak van de voortplanting van een sinusvormige fluctuatie van de stijghoogte in een pakket dat freatisch grondwater bevat. Sindsdien heeft de theorie der grondwatergetijden zich gestaag ontwikkeld. Met name enkele Nederlandse onderzoekers hebben daaraan belangrijke bijdragen geleverd. In de eerste plaats is daar het welbekende proefschrift van Steggewentz (Steggewentz, 1933), blijkens de titelpagina hydroloog bij het (toenmalige) Rijksbureau voor Drinkwatervoorziening. Steggewentz leidde verschillende formules af, waarvan er maar één de geschiedenis ingegaan is als 'de formule van Steggewentz'. Deze formule beschrijft de voortplanting van het getij in semi-spanningswater, rekening houdend met schommelingen van het freatische vlak in de slechtdoorlatende deklaag, maar onder volledige verwaarlozing van elastische eigenschappen van de ondergrond. De vermaarde Amerikaanse hydroloog Jacob was de eerste die wel rekening hield met elastische berging (Jacob, 1940). Zijn formule, die de demping en vertraging van een getij in zuiver spanningswater beschrijft, is overigens mathematisch identiek aan de formule van Forchheimer; het verschil zit hem slechts in de interpretatie van één van de fysische parameters, de bergingscoëfficiënt. Een belangrijker vooruitgang werd geboekt door Bosch (Bosch, 1951), die de aanpak van Jacob en Steggewentz combineerde en zo tot een formule kwam die sindsdien in Nederland veel toegepast wordt. Er zijn daarna nog wel verschillende verfijningen aangebracht, o.a. door Wesseling (1959), maar die bleken voor de hydrologische praktijk van minder belang te zijn. De theorie van de getijdenanalyse vond een – voorlopige – afronding in het proefschrift van Van der Kamp (1973). (Voorlopig, want ik heb met dit artikel het voornemen om bij de

Dr. ir. C. Maas is werkzaam bij Kiwa Onderzoek en Advies te Nieuwegein en bij de TU Delft, sectie Hydrologie en Ecologie. Zijn e-mailadres is: kmaas@kiwaoa.nl.

huidige stand van zaken kanttekeningen te plaatsen.) Van der Kamp beveelt verschillende nieuwe formules aan. De voornaamste zijn een variant op Bosch, en een formule voor volledig spanningswater, in welk laatste geval zowel in de watervoerende laag als in het afdekende pakket rekening gehouden wordt met elastische berging. Toch ligt de merite van Van der Kamps proefschrift naar mijn smaak op een ander vlak, maar daar kom ik straks op.

2 Getijvoortplanting in het grondwater

Na deze inleiding zal het u misschien verbazen dat alle genoemde auteurs met een gelijk-luidende uitdrukking op de proppen komen om de voortplanting van het getij in grondwater te beschrijven:

$$\varphi(x, t) = \varphi(0) e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x) \quad (1)$$

Hierin is

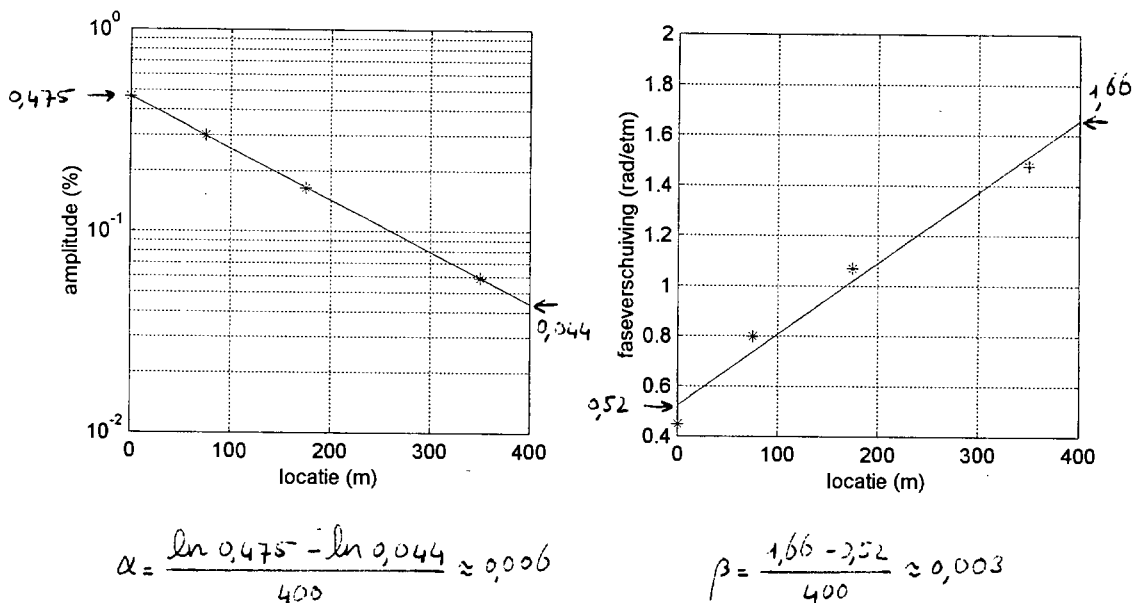
$\varphi(x, t)$	= grondwaterstijghoogte op plaats x en tijd t	[L]
x	= plaatsvariabele	[L]
t	= tijdvariabele	[T]
$\varphi(0)$	= amplitude van het getij op $x = 0$	[L]
α	= factor die de demping van het getij beheerst	[L ⁻¹]
ω	= frequentie van het getij	[T ⁻¹]
β	= factor die de vertraging van het getij beheerst	[L ⁻¹]

Ik stel trouwens straks precies dezelfde formule voor. De verschillen gelden dan ook niet de wijze waarop het getij zich voortplant, maar de fysische interpretatie van de 'voortplantingsparameters' α en β , die de demping en de vertraging van het getij regelen. Daarover gaat de volgende paragraaf; ik wil eerst iets zeggen over de demping en de vertraging in het algemeen.

De eerste stap bij het interpreteren van een getijdeproef is altijd het bepalen van α en β uit meetgegevens. Dit is een proces dat zich vast en zeker leent voor automatisering, maar als u daarvoor kiest moet u wel overwegen dat u dan van uw data vervreemdt. Persoonlijk breng ik mijn kinderen liever niet naar de 'crash', en in dit geval is het ook nergens voor nodig, want het gaat heel goed grafisch:

De amplitudes van het grondwatergetij, die u in een aantal peilbuizen gemeten heeft, zet u uit op enkel-logaritmisch papier, als functie van de plaats x : amplitudes verticaal langs de logaritmische as, x horizontaal langs de lineaire as. Het maakt voor de procedure niet uit of u de amplitudes absoluut neemt, of relatief ten opzichte van het open water. Door de meetpunten trekt u een rechte lijn. De helling van deze lijn (de tangens van de hellingshoek, dus) is gelijk aan α .

De faseverschuiving van het getij (in radialen! Het normale, tweemaal daagse getij heeft een frequentie van 12,14 rad/etm) zet u op gewoon grafiekpapier uit, eveneens als functie van x . Als u door de meetpunten weer een rechte lijn trekt, vindt u deze keer β als tangens van de hellingshoek.



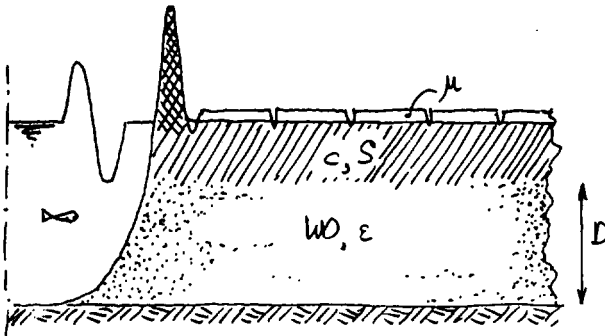
Figuur 1: Bepaling van de parameters α en β . De gegevens zijn afkomstig van een getijdenonderzoek dat het ICW in 1959 uitvoerde in de Prunjepolder, Schouwen-Duiveland. Bij dit onderzoek werd het grondwatergetij waargenomen in een raai van vier peilbuzen loodrecht op de kust.

Figuur 1 geeft een typisch voorbeeld van deze eerste stap in de uitwerking van een getijdenanalyse. Het betreft hier waarnemingen in de Prunjepolder op Schouwen-Duiveland, die in 1959 door het toenmalige Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding werden verricht. De gegevens zitten als verdwaalde bijlagen los in mijn archief; vermoedelijk komen ze uit een ICW-rapport van Wesseling; Wesseling heeft althans over dit getijdenonderzoek een artikel geschreven in *Geologie en Mijnbouw* (Wesseling, 1960).

Al zonder een verdere fysische betekenis te hechten aan α en β , kunt u met dit resultaat een interessant hydrologisch gegeven boven water krijgen. Tenminste, als u ook het getij van het open water gemeten hebt. (Meestal kunt u dat ook wel opvragen bij Rijkswaterstaat). U kunt de grafieken namelijk extrapoleren om te weten te komen waar zich de ‘voedende grens’ bevindt: dat is de x -coördinaat waar de amplitude van het grondwatergetij gelijk is aan de amplitude van het getij in het open water. U moet wel checken of op die locatie het grondwatergetij ook in fase loopt met het open water. Zoals u in figuur 1 kunt nagaan klopt dat in de Prunjepolder heel aardig: na extrapolatie snijden de schuine lijnen in beide grafieken de x -as op ongeveer dezelfde coördinaat. Dat blijkt in de praktijk echter niet altijd het geval! Een mogelijke verklaring voor afwijkend gedrag vindt u in Maas en De Lange (1986).

3 Bestaande getijformules; toepasbaarheid en beperkingen

Wanneer de numerieke waarden van α en β eenmaal vaststaan, kunnen daaruit zekere combinaties van bodemconstanten afgeleid worden. Elke auteur doet dat op zijn eigen wijze, afhankelijk van de manier waarop hij tegen het hydrologische systeem aankijkt. De bestaande formules hebben daardoor alle een beperkt geldigheidsgebied, wat evenwel – met uitzondering van Van der Kamp – door geen van de auteurs expliciet vermeld wordt. Het is de verdienste van Van der Kamp dat hij daaraan in zijn proefschrift uitgebreid aandacht heeft besteed.



Figuur 2: Hydrologisch schema

Alvorens op de bestaande formules in te gaan, introduceer ik een aantal parameters, die gerelateerd zijn aan het in figuur 2 gegeven hydrologische schema:

c	=	weerstand van de afdekkende laag	[T]
S	=	elastische bergingscoëfficiënt van de afdekkende laag	[-]
D	=	dikte van de wervoerende laag	[L]
kD	=	doorlaatvermogen van de wervoerende laag	[L ² T ⁻¹]
ϵ	=	elastische bergingscoëfficiënt van de wervoerende laag	[-]
μ	=	freatische bergingscoëfficiënt	[-]
λ	=	spreidingslengte	[L]

In tabel 1 heb ik alle eerder genoemde getijformules samengevat, uitgedrukt in deze parameters, onder toevoeging van de voornaamste voorwaarden van toepasbaarheid. In hoofdlijnen correspondeert deze tabel met overzichten die Van der Kamp in zijn proefschrift presenteert. Alle formules zijn afgeleid onder de aanname van Dupuit/Forchheimer, wat wil zeggen dat de stroming in de wervoerende laag horizontaal verloopt. (Het is feitelijk juist om te zeggen dat volgens de aanname van Dupuit/Forchheimer het drukverloop in de wervoerende laag hydrostatisch is.) Bovendien is aangenomen dat in de slechtdoorlatende laag de stroming verticaal verloopt (aanname van De Glee). Om geldig te zijn vereisen deze aannamen een duidelijk contrast tussen de specifieke doorlatendheden van de wervoerende laag en de deklaag. Neuman en Witherspoon (1969) suggereren dat daaraan voldaan is als de tegenstelling groter is dan een factor 100. Met name in het toepassingsgebied van de formule van Steggewentz kan men met deze eis in conflict komen. (Meer algemeen kan trouwens gesteld worden dat de voorwaarden die voor toepassing van Steggewentz in acht

Classificatie	Bijzonderheden	Auteur	Formules voor α en β	Oplosbare hydrologische parametergroepen	Voorwaasme' voorwaarden voor toepasbaarheid	Opmerkingen
Freatisch water		Forchheimer (1919)	$\alpha^2 - \beta^2 = 0$ $2\alpha\beta = \frac{\omega\mu}{kD}$	$\frac{\mu}{kD}$	$D \ll \sqrt{3 \frac{kD}{\mu}}$	· Aaame van Dupuit-Forchheimer waarschijnlijk ongetdig
Als aan de toepasbaarheidsvoorwaarden niet wordt voldaan, kan met de formule van Steggewentz gewerkt worden, waarin dan c vervangen moet worden door $\frac{1}{3} \frac{D}{k_v}$, met k_v = vertikale doorlatendheid (Van der Kamp, 1973).						
Semi-spanningswater ($\omega c S < 1$)	· Vrij bewegend freatisch vlak in afdekkende laag · Geen elastische berging	Steggewentz (1933)	$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{(\omega\mu c)^2}{1 + (\omega\mu c)^2}$ $2\alpha\beta = \frac{\omega\mu}{kD} \frac{1}{1 + (\omega\mu c)^2}$	$\lambda, \frac{\mu}{kD}$	$\omega c S < 1$ $\mu > \frac{1}{3} S + 1$ $\mu \ll \sqrt{\frac{S}{\omega c}}$	· Alleen bruikbaar bij zéér kleine c-waarden (zie derde voorwaarde) · Aannamen D-F en De Glee waarschijnlijk ongetdig
		Bosch (1951)	$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\omega \varepsilon}{kD}$ $2\alpha\beta = \frac{\omega \varepsilon}{kD}$	$\lambda, \frac{\varepsilon}{kD}$	$\omega c S < 1$ $S \ll \varepsilon$	
Spanningswater ($\omega c S > 20$)	· Ondoorlatende inelastische afdekkende laag · "Dikke" afdekkende laag met elastische berging	Bosch, Modificatie door Van der Kamp (1973)	$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\omega (S + \varepsilon)}{kD}$ $2\alpha\beta = \frac{\omega (S + \varepsilon)}{kD}$	$\lambda, \frac{1}{3} \frac{S + \varepsilon}{kD}$	$\omega c S < 1$	
		Jacob (1940)	$\alpha^2 - \beta^2 = 0$ $2\alpha\beta = \frac{\omega \varepsilon}{kD}$	$\frac{\varepsilon}{kD}$	$\omega c S > 20$ $\omega c S \ll 2 (\omega \varepsilon c)$	· Bijzonder geval van de formule van Van der Kamp
		Van der Kamp (1973)	$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{\lambda^2} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\omega c S}{\omega \varepsilon}}$ $2\alpha\beta = \frac{\omega \varepsilon}{kD} + \frac{1}{\lambda^2} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\omega c S}{\omega \varepsilon}}$	$\frac{\lambda^2}{\sqrt{cS}}, \frac{\varepsilon}{kD}$	$\omega c S > 20$	· In zijn oorspronkelijke vorm houdt de formule ook rekening met elastische berging in de basislaag

Tabel 1: Overzicht van de belangrijkste formules voor grondwatergetijden.

genomen moeten worden, in de praktijk zelden vervuld zullen zijn. De formule kan echter in bepaalde gevallen gebruikt worden voor freatisch water.) Tenslotte teken ik aan dat de formule van Van der Kamp voor spanningswater in zijn oorspronkelijke gedaante ook rekening houdt met elastische berging in de basislaag. De termen die daarop betrekking hebben zijn uit deze tabel weggelaten, op grond van de pragmatische overweging dat in het toepassingsgebied van deze formule het bergingseffect van de afdekkende laag - ten gevolge van een geringere mate van consolidatie - het bergingseffect van de basislaag over het algemeen zal overschaduwen.

Het zal u waarschijnlijk al opgevallen zijn dat de meeste voorwaarden voor toepasbaarheid afhangen van de frequentie van het getij. Vaak is het mogelijk om in een getij verschillende frequenties te onderscheiden, die ieder afzonderlijk geanalyseerd kunnen worden: ze planten zich ieder met hun eigen demping en vertraging voort. Als u met tabel 1 werkt, kan het gebeuren dat u voor de ene frequentie een andere formule moet gebruiken dan voor de andere! Het onderscheid tussen freatisch water, semi-spanningswater en spanningswater is dus betrekkelijk. In het algemeen geldt dat een watervoerend pakket de neiging heeft om zich tegenover hoge frequenties eerder als spanningswater te gedragen, en tegenover lage frequenties meer als freatisch water. Snelle fluctuaties planten zich veel sneller voort dan langzame, maar ze dempen ook veel sneller uit.

Het gebruik van de tabel gaat als volgt: als u α en β uit uw peilbuiswaarnemingen bepaald hebt, kiest u de formule die bij uw hydrologische situatie past. Vervolgens treft u in de vierde kolom de relaties aan die bepaalde groepen van bodemconstanten met α en β onderhouden. U ziet wel dat de oogst vrij mager is. Het meest concrete resultaat boekt u nog in het geval van semi-spanningswater: daar kunt u de spreidingslengte λ berekenen. Dit is tenminste een solide hydrologische parameter, maar voor numerieke modelstudies zijn gewoonlijk kD en c apart nodig. De kD -waarde komt helaas uitsluitend voor in combinatie met de bergingscoëfficiënt. Deze parametergroep is als zodanig van weinig praktisch nut. Om meer te kunnen zeggen moet u op een onafhankelijke wijze iets te weten komen over de berging van het pakket, bijvoorbeeld door een analyse van de reactie van de grondwaterstijghoogte op barometrische variaties; zie bijvoorbeeld Uffink (1982) of Van der Kamp en Gale (1983). Als u toch aan het meten bent, is het dus zonder meer de moeite waard om ook de barometer in de gaten te houden. Zodra u kD kent, kunt u natuurlijk c bepalen op grond van de al bekende spreidingslengte. In het geval van spanningswater komt de spreidingslengte echter niet afzonderlijk uit de analyse, zodat u in dat geval de c -waarde nog niet kunt vaststellen, ook al zou u kD kennen. Dat is ook wel logisch: in de c -waarde ligt per definitie de dikte van de afdekkende laag besloten. Als het getij niet door de afdekkende laag heen dringt, kunnen de voortplantingsparameters ook geen informatie over zijn dikte verschaffen.

Ik ben nu aangeland bij de bestaansgrond van dit artikel. Er zijn twee redenen aan te voeren om de theorie van de getijdenanalyse verder te ontwikkelen. In de eerste plaats is het tamelijk lastig om in een concreet geval de goede formule uit te kiezen, omdat de geldigheidsgebieden uitgedrukt zijn in bodemconstanten waarvan de numerieke waarden gewoonlijk niet bekend zijn. Een tweede - fundamentele - argument is dat geen van de formules blijkt op te gaan in een traject dat globaal is aan te geven door

$$1 \leq \omega c S \leq 20 \quad (2)$$

Dat wil zeggen: het overgangsgebied tussen spanningswater en semi-spanningswater. Als ik voor Nederlandse omstandigheden voor de vuist weg de volgende parameters schat:

$$\begin{aligned} S &= 10^{-3} \text{ à } 10^{-4} \\ c &= 10^2 \text{ à } 10^3 \text{ etm} \\ \omega &= 12,14 \text{ etm}^{-1} \text{ (normaal getij)} \end{aligned}$$

dan vind ik globaal

$$0,1 \leq \omega c S \leq 10 \quad (3)$$

Voor enkeldaagse en viermaaldaagse getijcomponenten, die vaak nog goed te onderscheiden zijn, gaan de beide grenzen een factor 2 omlaag, respectievelijk omhoog. Zoals u ziet is er juist in een traject dat voor de praktijk belangrijk is geen formule beschikbaar. Fysisch gezien gaat het om situaties waarin de verhouding tussen de berging en verticale doorlatendheid van de afdekkende laag zodanig is, dat er aan de bovenzijde van deze laag nog wel een door het getij gestuurde kwelflux merkbaar is, die echter in fase achterloopt op het getij in de onderliggende watervoerende laag.

In de volgende paragraaf presenteer ik een formule die de aangevoerde bezwaren in één klap ondervangt.

4 Een meer algemeen geldige formule voor getijvoortplanting in een systeem met één watervoerende laag

Appendix 1 geeft een verantwoording van de volgende uitdrukkingen:

$$\varphi(x, t) = \phi(0) e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x) \quad (4)$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{\lambda^2} f\{\omega c S\} \quad (5)$$

$$2\alpha\beta = \frac{\omega \varepsilon}{kD} + \frac{1}{\lambda^2} g\{\omega c S\} \quad (6)$$

$$f\{\omega c S\} = \sqrt{\frac{1}{2} \omega c S} \frac{\sinh \sqrt{2\omega c S} + \sin \sqrt{2\omega c S}}{\cosh \sqrt{2\omega c S} - \cos \sqrt{2\omega c S}} \quad (7)$$

$$g\{\omega c S\} = \sqrt{\frac{1}{2} \omega c S} \frac{\sinh \sqrt{2\omega c S} - \sin \sqrt{2\omega c S}}{\cosh \sqrt{2\omega c S} - \cos \sqrt{2\omega c S}} \quad (8)$$

Ik beschouw dit samenhangende stelsel als één formule. Het is aantoonbaar dat

$$\lim_{\omega c S \rightarrow \infty} f\{\omega c S\} = \sqrt{\frac{1}{2} \omega c S} \quad (9)$$

$$\lim_{\omega c S \rightarrow \infty} g\{\omega c S\} = \sqrt{\frac{1}{2} \omega c S} \quad (10)$$

Voor grote waarden van $\omega c S$ (zeg > 20) gaat de formule dus over in de formule van Van der Kamp (zie tabel 1). Ook kan aangetoond worden dat

$$\lim_{\omega c S \rightarrow 0} f\{\omega c S\} = 1 \quad (11)$$

$$\lim_{\omega c S \rightarrow 0} g\{\omega c S\} = 0 \quad (12)$$

waaruit blijkt dat de formule voor kleine waarden van $\omega c S$ (zeg < 1) overgaat in de formule van Bosch (zie tabel 1). Als alternatief voor vergelijking (12) kan men schrijven:

$$\lim_{\omega c S \rightarrow 0} g\{\omega c S\} = \frac{1}{3} \omega c S \quad (13)$$

waarmee Van der Kamps modificatie van de formule van Bosch gevonden wordt (zie tabel 1). De formules van Jacob en van Forchheimer kunnen eveneens door geschikte limietovergangen uit formule (4) t/m (8) afgeleid worden. De nieuwe formule vervangt dus alle formules van tabel 1 – met uitzondering van de formule van Steggewentz – en hij is bovendien geldig in het traject dat door geen van de andere formules afgedekt wordt. Het is goed mogelijk om een nog algemenere formule af te leiden, die ook de formule van Steggewentz incorporeert. (Het lukt zelfs om een formule te vinden die ook de niet in tabel 1 opgenomen formule van Wesseling omvat.) De uitdrukkingen voor de functies f en g , die dan ook de freatische bergingscoëfficiënt μ bevatten, worden daardoor echter erg gecompliceerd. Omdat de voorwaarden, waaronder de formule van Steggewentz geldig is, zich in de praktijk nauwelijks voordoen, zie ik ervan af om die uitdrukking in dit artikel te presenteren.

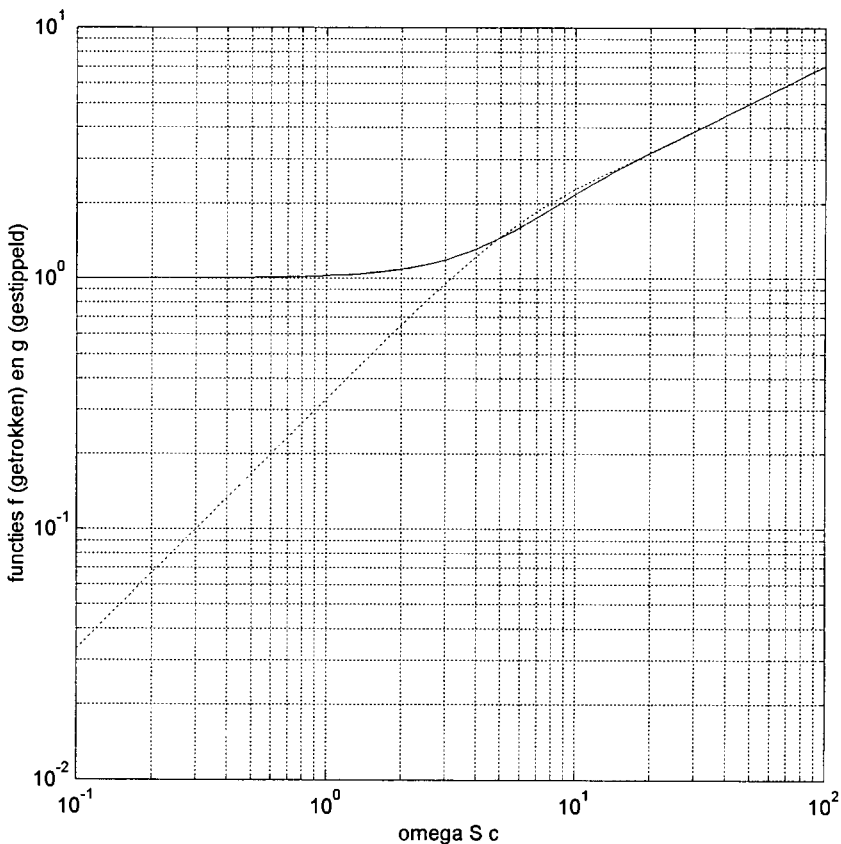
Ik besluit deze paragraaf met het opsommen van de aannamen waaronder formule (4) t/m (8) is afgeleid:

- 1 horizontale stroming in de watervoerende laag;
- 2 verticale stroming in de afdekkende laag;
- 3 ondoorlatende basis;
- 4 alle pakketten homogeen van samenstelling;
- 5 $\mu \gg \sqrt{S/\omega c}$.

Aannamen 1 en 2 vereisen dat het contrast in specifieke doorlatendheden (' k -waarden') tussen de watervoerende laag en de afdekkende laag groter is dan 100:1. Aanname 3 impliceert dat de basis niet elastisch is, althans onder samendrukking geen water uitlevert. In de praktijk zal de elastische berging van de basis vaak wel verwaarloosbaar zijn ten opzichte van die van de afdekkende laag, die gewoonlijk veel minder geconsolideerd is. Aanname 4 spreekt voor zich. Aan aanname 5 zal in de praktijk altijd wel voldaan zijn.

5 Het werken met de nieuwe formule

Bij de gebruikelijke analyse van grondwatergetijden leidt men uit peilbuiswaarnemingen de voortplantingsparameters α en β af, op de manier die ik in paragraaf 2 beschreef. Gewoonlijk vat men daarbij de volledige getijbeweging op als een sinusvormige fluctuatie met de periode van de tweemaaldaagse getijcomponent, die inderdaad meestal sterk overheerst. (De tweemaaldaagse getijcomponent heeft een periode van 0,517 etm, dus een frequentie van 12,14 rad/etm. U kunt in de literatuur ook wel lichtelijk hiervan afwijkende getallen aantreffen.) Ongeacht het aantal peilbuizen levert het veldwerk dan dus slechts twee onafhankelijke gegevens op. Beschouwt u nu de uitdrukkingen (4) t/m (8), dan zult u waarschijnlijk beamen dat er met die kennis nog niet zo heel veel te zeggen valt over de bodemeigenschappen. Als u meer dan twee gegevens uit de waarnemingen wilt afleiden, kunt u de getijkrommen ontleden in harmonische componenten en iedere component afzonderlijk analyseren. Bij iedere component behoort een andere waarde van ω , en bij iedere ω behoren onafhankelijke waarden van α en β . Gewoonlijk is naast de tweemaaldaagse getijcomponent de eenmaaldaagse component duidelijk aanwezig, en soms kan men ook één of enkele hogere harmonischen terugvinden. Daar bestaat software voor, maar zoals Van der Kamp verzekert, lukt het terugvinden van het normale getij en de eenmaaldaagse getijcomponent ook heel goed met de kleinste-kwadratenmethode (zie ook appendix 2).



Figuur 3: Standaardkrommen voor het interpreteren van grondwatergetijden

U gaat nu als volgt te werk: figuur 3 geeft op log-log-papier de functies $f\{\omega cS\}$ (getrokken) en $g\{\omega cS\}$ (gestippeld) weer. U neemt/maakt een stuk transparant papier met precies dezelfde schaalverdeling. Op uw eigen papier zet u horizontaal de frequenties (ω -waarden) uit, waarvoor u α en β bepaald hebt, en verticaal de bijbehorende waarden van $(\alpha_2 - \beta_2)$. Er zijn nu drie verschillende mogelijkheden:

- 1 De zo geconstrueerde beeldpunten liggen op een horizontale lijn. In dit geval heeft u te maken met een situatie waarin $\omega cS < 1$, zodat de formule van Bosch voor semi-spanningswater toepasbaar is. Ga verder met tabel 1.
- 2 De beeldpunten liggen op een rechte met helling 1:2. In dit geval heeft u te maken met een situatie waarin $\omega cS > 20$, zodat de formule van Van der Kamp voor spanningswater opgaat. Ga verder met tabel 1.
- 3 De beeldpunten liggen op een lijn met een helling groter dan 0 en kleiner dan 1:2. In dit geval is het mogelijk om de beeldpunten op uw zelfgeprepareerde grafiek eenduidig tot dekking te brengen met de getrokken lijn van de 'standaardgrafiek', figuur 3 ('curve matching'). De waarde van cS leest u af op de horizontale as van de standaardgrafiek, op de plaats waar deze gesneden wordt door de verticale lijn $\omega = 10^0$ van uw eigen grafiek. De waarde van $1/\lambda^2$ leest u af op de verticale as van uw eigen grafiek, op de plaats waar deze gesneden wordt door de horizontale lijn $f\{\omega cS\} = 10^0$ van de standaardgrafiek. De waarde van de groep ϵ/kD kunt u nu uit vergelijking (6) afleiden. Daarvoor heeft u de waarde(n) van de functie $g\{\omega cS\}$ nodig, die u kunt aflezen uit de standaardgrafiek (figuur 3, gestippelde lijn).

Ik besluit met een getallenvoorbeeld uit de Tielerwaard. In zijn proefschrift vermeldt Van der Kamp de volgende gegevens (die afkomstig zijn van Wesseling en Colenbrander, (1961)):

$$\begin{aligned} \omega = 12,14 \text{ rad/etm: } \alpha_2 - \beta_2 &= 2,73 \cdot 10^{-6}/\text{m}^2 & 2\alpha\beta &= 8,06 \cdot 10^{-6}/\text{m}^2 \\ \omega = 0,225 \text{ rad/etm: } \alpha_2 - \beta_2 &= 0,65 \cdot 10^{-6}/\text{m}^2 & 2\alpha\beta &= 0,26 \cdot 10^{-6}/\text{m}^2 \end{aligned}$$

Wie de moeite neemt om de curve-matching-procedure uit te voeren volgens de bovenstaande richtlijnen, kan het volgende resultaat controleren:

$$\begin{aligned} cS &= 2,7 \text{ etm} \\ \lambda &= 1240 \text{ m} \\ \epsilon/kD &= 0,44 \text{ à } 0,66 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

De gegevens uit de Tielerwaard zijn bijzonder, omdat één stel waarden van α en β betrekking heeft op een ongebruikelijk langzame periodieke fluctuatie van 28 dagen. Daardoor komen de beeldpunten in de log-log-grafiek comfortabel ver uit elkaar te liggen, wat een eenduidige curve matching vereenvoudigt. De laatste parametergroep (ϵ/kD) kan voor beide waarden van ω berekend worden. Het resultaat blijkt niet geheel consistent te zijn; ik heb de neiging om aan de laagste waarde de voorkeur te geven, omdat deze hoort bij het gewone, tweemaaldaagse getij, dat veel regelmatig is dan de periodieke fluctuatie van 28 dagen. Overigens valt het op dat het pakket op het gewone getij niet reageert als semi-spanningswater, maar als volledig spanningswater ($\omega cS > 20$, nl $\omega cS = 33$). Aangezien de Tielerwaard geohydrologisch gezien voor West-Nederland niet uitzonderlijk is, voel ik mij gestijfd in mijn verdenking dat de formule van Bosch minder algemeen toepasbaar is dan

de praktijk doorgaans voetstoots aanneemt. Ik neem me dan ook voor om voortaan heel voorzichtig om te springen met λ -waarden die op die manier vastgesteld zijn.

6 Samenvatting en besluit

Het werken met de bestaande formules voor grondwatergetijden is vrij lastig omdat de geldigheidsgebieden uitgedrukt zijn in bodemconstanten die gewoonlijk bij de aanvang van een onderzoek niet bekend zijn. Bovendien is geen van deze formules geldig in het overgangsgebied tussen spanningswater en semi-spanningswater. Toch heeft men in de praktijk vaak met dit gebied te maken. In dit artikel is een formule gepresenteerd (vergelijkingen (4) t/m (8)) die de belangrijkste bestaande formules incorporeert en die ook geldig is in het genoemde overgangsgebied. Ter interpretatie van meetgegevens kan gebruik gemaakt worden van een curve-matching-procedure, waarvoor een 'standaardgrafiek' gepresenteerd is (figuur 3).

Als besluit is misschien een 'disclaimer' op zijn plaats. De hier behandelde theorie gaat over systemen met één watervoerende laag, wat in de Nederlandse situatie wel een beperking genoemd moet worden. Ik hoop in de nabije toekomst gelegenheid te vinden om ook iets over meerlagige systemen te schrijven.

7 Verantwoording

Voor de goede orde vermeld ik dat ik het leeuwendeel van dit werk begin jaren tachtig heb uitgevoerd in dienst van de Provinciale Waterstaat in Zeeland. Door een wisseling van werkgever is het destijds niet tot rapportage gekomen. Hoewel het niet in dit artikel tot uiting komt, ben ik dank verschuldigd aan de heer K.E. Wit van het toenmalige ICW, die me destijds aan veel oude gegevens over het deltagebied geholpen heeft.

8 Literatuur

- Bosch, H. (1951)** Geohydrologisch onderzoek te Bergambacht; Hydrologisch Colloquium, Den Haag.
- Forchheimer, Ph. (1919)** Zur Theorie der Grundwasserströmung; in: *Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung IIa*, 128, 8. Heft, pag 7–14.
- Jacob, C.E. (1940)** On the flow of water in an elastic aquifer, in: *Trans. American Geoph. Union*, vol 21, pag 575–586.
- Kamp, G.S.J.P. van der (1973)** Periodic flow of groundwater; proefschrift, Vrije Universiteit, Amsterdam.
- Kamp, G. van der en J.E. Gale (1983)** Theory of earth tide and barometric effects in porous formations with compressible grains, in: *Water Resources Research*, jrg 19, nr 2, pag 538–544.
- Maas, C. en W.J. de Lange (1986)** Over het voorlopen van het grondwatergetij op de getijbeweging van de Hollandse IJssel; in: *H₂O*, nr 2, pag 24–28.

- Maas, Kees en Theo Olsthoorn (1997)** Snelle oudjes gaan MATLAB; in: *Stromingen*, jrg 3, nr 4, pag 21–42.
- Neuman, S.P. en P.A. Witherspoon (1969)** Applicability of current theories of flow in leaky aquifers; in: *Water Resources Research*, jrg 5, nr 4, pag 803–816.
- Steggenwentz, J.H. (1933)** De invloed van de getijbeweging van zeeën en getijrivieren op de stijghoogte van grondwater; proefschrift, Technische Hoogeschool Delft.
- Uffink, G.J.M. (1982)** De bepaling van de elastische bergingscoëfficiënt aan de hand van de barometrische gevoeligheid; in: *H₂O*, jrg 15, nr 19, pag 529–533.
- Wesseling, J. (1959)** Transmission of tidal waves in elastic artesian basins; in: *Netherlands Journal of Agricultural Science*, jrg 7, pag 22–32.
- Wesseling, J. (1960)** Enkele resultaten van de bepaling van hydrologische constanten uit getijwaarnemingen in het Prunjegebied (Schouwen-Duiveland); in: *Geologie en Mijnbouw*, jrg 39, pag 624–630.
- Wesseling, J. en H.J. Colenbrander (1961)** De bepaling van de hydrologische bodemconstanten uit de voortplanting van de getijbeweging; in: *De waterbehoefte van de Tielerwaard-West*, Commissie ter bestudering van de waterbehoefte van de Gelderse Landbouwgronden, pag 60–65.

Appendix 1: Verantwoording van formule (4) t/m (8)

Ik ga er van uit dat u op de hoogte bent van de wijze waarop de differentiaalvergelijkingen voor de stijghoogte in goed- en slechtdoorlatende lagen onder de aannamen van Dupuit/Forchheimer en De Glee worden afgeleid. Voor een systeem bestaande uit één watervoerende laag, afgedekt door een slecht doorlatende laag en rustend op een ondoorlatende ondergrond, luidt het resultaat:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{cS}{d^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad 0 < z < d \quad (14)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\mu c}{d} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (15)$$

$$z = d: \quad \psi = \varphi \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{d}{\lambda^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}(z = d) = \frac{\varepsilon}{kD} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (17)$$

$$x = 0: \quad \varphi = \varphi(0) = \phi(0) \sin(\omega t) \quad (18)$$

$$x \rightarrow \infty: \quad \varphi \rightarrow 0 \quad (19)$$

Hierin is

$\psi(z)$	=	grondwaterstijghoogte in de slechtdoorlatende laag, uitgedrukt t.o.v. de halftijstand [L]
z	=	plaatsvariabele (verticaal) [L]
		$z = 0$ komt overeen met de positie die het freatische vlak tijdens

		halfij inneemt; $z = d$ komt overeen met de scheiding tussen de afdekkende laag en de watervoerende laag
d	=	dikte van de afdekkende laag [L]
φ	=	grondwaterstijghoogte in de watervoerende laag, uitgedrukt t.o.v. de halfijstand [L]
$\phi(0)$	=	amplitude van het getij t.p.v. $x = 0$ [L]
x	=	plaatsvariabele (horizontaal) [L]
t	=	tijdvariabele [T]

De betekenis van de overige symbolen is in het hoofdartikel omschreven. Ik veronderstel dat het systeem in een toestand van permanente fluctuatie verkeert. In het gebied $\omega c S > 1$, waarin ik geïnteresseerd ben, kan randvoorwaarde (15) gevoeglijk vervangen worden door

$$z = 0: \quad \psi = 0 \quad (20)$$

(Vereist is daartoe dat $\mu \gg \sqrt{S/\omega c}$; waaraan onder praktische omstandigheden altijd wel voldaan is zolang er sprake is van een afdekkende laag).

De term $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ ($z = d$), die in vergelijking (17) voorkomt, is op te lossen uit het stelsel (14), (16) en (20). Na substitutie in vergelijking (17) ontstaat een differentiaalvergelijking in φ die onder de voorwaarden (18) en (19) tot de oplossing leidt die in het hoofdartikel gegeven is als vergelijkingen (4) t/m (8).

Appendix 2: Het bepalen van de één- en tweemaaldaagse harmonische componenten van het getij met MATLAB

Van der Kamp laat in zijn proefschrift zien dat het bepalen van de amplitudes en de fasen van de belangrijkste twee harmonische componenten van het grondwatergetij heel goed lukt met de kleinste-kwadratenmethode. Het is daarbij natuurlijk een hele hulp dat de frequenties zelf al bekend zijn. Het tweemaaldaagse getij heeft frequentie $\omega = 12,14$ rad/etm en duurt dus 0,517 etmaal. Ik selecteer uit de getijdewaarnemingen een reeks ter lengte van twee getijden, dus 1,034 etmaal. De n stijghoogtewaarnemingen die in deze periode vallen duid ik aan met $G(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. De opgave is nu om numerieke waarden te vinden van M , A_1 , θ_1 , A_2 en θ_2 , zodanig dat de functie

$$F(t) = M + A \sin(\omega t + \theta_1) + B \sin(.5\omega t + \theta_2) \quad (21)$$

zo goed mogelijk door de meetpunten gaat. Idealiter is dus

$$M + A \sin(\omega t_j + \theta_1) + B \sin(.5\omega t_j + \theta_2) = G(t_j) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

Via de substitutie

$$a_1 = \frac{A}{2i} e^{-i\theta_1} \quad a_2 = \frac{A}{2i} e^{i\theta_1} \quad b_1 = \frac{B}{2i} e^{-i\theta_2} \quad b_2 = \frac{B}{2i} e^{i\theta_2} \quad (23)$$

waarin $i = \sqrt{-1}$, gaat (22) over in

$$M + a_1 e^{i\omega_j} + a_2 e^{-i\omega_j} + b_1 e^{0,5i\omega_j} + b_2 e^{-0,5i\omega_j} = G(t_j) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

Dit is een stelsel van n lineaire vergelijkingen in 5 onbekenden, gewoonlijk met $n \gg 5$. In het algemeen is dit stelsel dus 'overbepaald', en er is een extra voorwaarde nodig om tot een eenduidige oplossing te komen. De voorwaarde die daarvoor het meest gebruikt wordt is dat de som van de kwadraten van de afwijkingen tussen $F(t_j)$ en $G(t_j)$ zo klein mogelijk moet zijn. Van der Kamp moest destijds nog zijn eigen software maken, maar met het schitterende wiskundeprogramma MATLAB, waarvoor we in STROMINGEN al eerder een lans gebroken hebben (Maas en Olsthoorn, 1997), is het vinden van de 'optimale' oplossing een fluitje van een cent. In zijn algemeenheid lost men in MATLAB een lineair stelsel $Ax = y$ (A een matrix, x en y vectoren) op door simpelweg het commando $x = A \setminus y$ in te tikken. Als er meer vergelijkingen dan onbekenden zijn – zoals in ons geval – dan is MATLAB zo snugger om als antwoord de oplossing te geven die het best voldoet in de zin van de kleinste kwadraten. Op deze wijze vindt u dus probleemloos de 'optimale' waarden van M , a_1 , a_2 , b_1 en b_2 . De amplitudes A en B en de fasen θ_1 en θ_2 zijn tenslotte terug te rekenen uit de relaties (23).

(MATLAB is geen goedkoop programma, maar voor eigen gebruik kunt u werken met de studentenversie, die momenteel iets in de orde van f 230,— kost. Hij is verkrijgbaar bij de betere academische boekwinkels. De studentenversie is voor vrijwel al mijn toepassingen toereikend.)