Een fysische onderbouwing van de overdrachtsfactor

C. van den Akker

In de publicatie "Tussen Dupuit en De Glee" in Stromingen wordt een geohydrologische situatie beschouwd met stationaire grondwaterstroming in een gedeeltelijk afgesloten watervoerend pakket. De gebiedsgemiddelde freatische grondwaterstand wordt mede bepaald door het vrij afstromende oppervlaktewatersysteem. In de genoemde publicatie wordt gebruik gemaakt van een hyperbolische overdrachtsfactor tussen de gebiedsgemiddelde freatische grondwaterstand en de stijghoogte in het watervoerende pakket. De overdrachtsfactor is gedefinieerd als de mate waarin een verandering van de stijghoogte resulteert in een verandering van de grondwaterstand. Teneinde een fysische onderbouwing te geven voor de overdrachtsfactor en het hyperbolische verloop daarvan wordt op basis van klassieke grondwatermechanica een relatie gelegd met uitgevoerd onderzoek (Ernst, 1971).
Het betreft onderzoek in vrij afwaterende gebieden in het zuidoosten van Nederland waar een relatie wordt gepresenteerd tussen de gebiedsgemiddelde grondwaterstand en de afvoer per oppervlakteeenheid door het oppervlaktewatersysteem.

Inleiding

Het is inmiddels ongeveer acht maanden geleden dat het artikel "Tussen Dupuit en De Glee" werd geplaatst op de site van de NHV voor publicatie in" Stromingen jrg 19 #2". Tot op heden (februari 2014) is er geen enkele reactie geweest, behoudens van een drietal (ex)collega's die op mijn verzoek, na toezending van het artikel, hebben gereageerd. Uit de wereld van de (geo)hydrologen, onderzoeksinstituten, consultants, waterleidingbedrijven, provincies en relevante commissies zoals de Commissie Deskundigen Grondwaterwet (CDG) en later de AdviesCommissie Schade Grondwater (ACSG) is geen enkele reactie vernomen. Toch is hetgeen dat wordt geponeerd in het artikel niet onbelangrijk. Er wordt gesteld dat de zogeheten achtergrondverlaging niet bestaat. De gemeten trendmatige verlaging van de stijghoogten in de diepere watervoerende pakketten, die wordt aangemerkt als achtergrondverlaging, is wel degelijk verklaarbaar en de grondwaterwinningen dragen substantieel bij aan deze trendmatige verlaging. Ik onderbouw deze uitspraak met afleidingen van formules gebaseerd op de wet van Darcy en de continuïteitsvergelijking. Ook wordt een aantal voorbeeldberekeningen gepresenteerd.

De uitspraak is ook tamelijk beleidsgevoelig. In het kader van bijvoorbeeld landbouwschade als gevolg van grondwaterwinningen zijn grote belangen in het geding en juist daar is een correcte interpretatie van verlagingen essentieel.

Op mijn voorstel heeft de NHV op 28 november 2013 een bijeenkomst georganiseerd onder de titel “De achtergrondverlaging op de voorgrond“. Wellicht dat deze bijeenkomst nog reacties op het artikel oproept. Echter, zoals gezegd, tot op heden heb ik niets vernomen.

Wat kan de reden zijn dat er, in ieder geval naar mij, niet wordt gereageerd. Wellicht spelen de volgende overwegingen een rol:
– Men begrijpt de materie niet en neemt niet de moeite om de gedachtegang te volgen en de afleidingen te begrijpen.
– Het probleem ligt te gevoelig, er zijn grote financiële belangen mee gemoeid.
– Reageren betekent stellingname en men is bang daarmee “probleemhouder” te worden.
– Er wordt bestuurlijke druk uitgeoefend om het onderwerp van de agenda te houden.
– Het is lastig om terug te komen op eerder ingenomen standpunten en getrokken conclusies, kortom er dreigt reputatieschade.

Het bovenvermelde heb ik in het afgelopen jaar daadwerkelijk ervaren en dit heeft mij er toe gebracht om de bewering dat de trendmatige verlaging goed verklaarbaar is nader te onderbouwen.

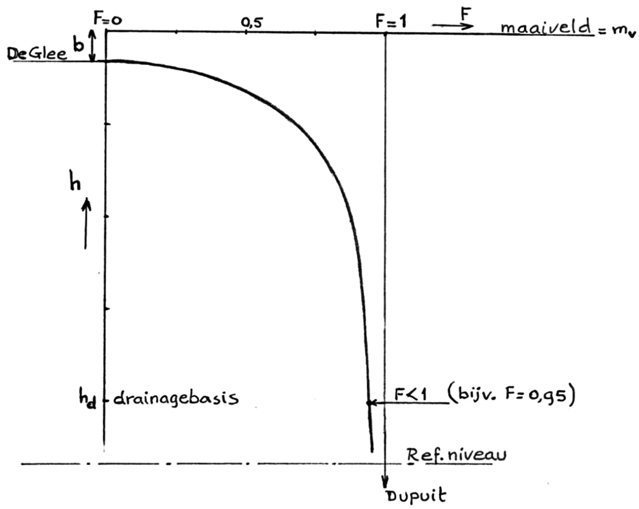
Toelichting op het artikel “Tussen Dupuit en De Glee”

In de periode nadat het artikel op de site van de NHV is geplaatst heb ik aan de keukentafel nog wat aanvullend werk gedaan. Met name het karakteriseren van de overdrachtsfactor met een hyperbolisch verloop is niet onbelangrijk. Dit hyperbolisch verloop sluit enerzijds aan bij een Dirichlet randvoorwaarde, zoals die in de formule van De Glee is opgenomen (F=0) en anderzijds bij de Neuman randvoorwaarde, zoals in de formule van Dupuit (F=1). In tussenliggende situaties, waarbij het oppervlaktewatersysteem een rol speelt, geldt een gemengde randvoorwaarde.

In afbeelding 1 is het verloop van de overdrachtsfactor weergegeven. Opvallend is het sterk niet lineaire karakter van de functie. Tijdens de NHV bijeenkomst op 28 november 2013 ontstond er enige discussie over het wel of niet correct zijn van een sterk niet lineair verloop. Eveneens werd de fysische betekenis van de overdrachtsfactor betwijfeld.

Het is dus zaak om op basis van fysische wetmatigheden aan te tonen dat een hyperbolisch verloop een realistische weergave is van de relatie tussen de gebiedsgemiddelde grondwaterstand en de stijghoogte in een onderliggend watervoerend pakket, uiteraard onder de voorwaarden zoals aangegeven in het artikel. Deze voorwaarden zijn, kort samengevat:
– We hebben te maken met gebieden op een regionale schaal die vrij afwaterend zijn.
– Het freatisch pakket heeft een laag doorlaatvermogen
– De scheidende laag heeft een hydraulische weerstand die niet meer is dan een paar duizend dagen
– Het watervoerende pakket heeft een relatief hoog doorlaatvermogen, bijvoorbeeld enkele duizenden vierkante meters per dag.

De relatie tussen de overdrachtsfactor en de afvoer per oppervlakte eenheid van het oppervlaktewatersysteem



Afbeelding 1: Hyperbolisch verloop van de overdrachtsfactor.

De verticale volumestroomdichtheid door de scheidende laag kan op basis van de wet van Darcy worden geschreven als:

$$q = -\frac{h-\varphi}{c} \tag{1}$$

waarin:
h = freatische grondwaterstand [m]
φ = stijghoogte in het watervoerende pakket [m]
c = hydraulische weerstand van de scheidende laag [dagen]

Vervolgens kan gesteld worden dat:

$$\frac{dq}{dh} = \frac{d}{dh}\left(-\frac{h-\varphi}{c}\right) = -\frac{1}{c}\left(1-\frac{d\varphi}{dh}\right) \tag{2}$$

De overdrachtsfactor F is gedefinieerd als de afgeleide van h naar φ dus:

$$\frac{dh}{d\varphi} = F \tag{3}$$

De overdrachtsfactor F wordt (Van den Akker, 2013) gekarakteriseerd met een hyperbolisch verloop, waarbij:

$$F = \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{h - m_v - b}\right)} \tag{4}$$

waarin:
a = constante <0 [m]
b = constante ≤ 0 [m]
m_v = maaiveldhoogte ten opzichte van referentie niveau [m]

Daarmee wordt:

$$\frac{dq}{dh}=\frac{a}{c}\left(\frac{1}{h-m_v-b}\right) \tag{5}$$

In een vrij afwaterend gebied wordt verondersteld dat er een relatie is tussen de afvoer per eenheid oppervlak $U(h)$ en de freatische grondwaterstand h. In een eerste benadering neem ik aan dat dat een verandering van de volumestroomdichtheid door de scheidende laag volledig wordt gecompenseerd door een verandering van de afvoer van het oppervlaktewater. Dit wil dus zeggen dat een verandering van de freatische grondwaterstand geen invloed heeft op bijvoorbeeld de verdamping van de vegetatie. Dit is uiteraard in het algemeen niet het geval, immers de opbrengstdepressie van landbouwgewassen wordt veroorzaakt door een verdampingreductie. Deze verdampingsreductie ligt (Ernst, 1971) in de orde van grootte van een tiental procenten van de onttrekking uit het watervoerende pakket in het vrij afwaterende gebied in het zuidoosten van Nederland. Ook bergingsveranderingen laat ik buiten beschouwing aangezien wordt uitgegaan van stationaire grondwaterstroming.

Er kan nu gesteld worden dat:

$$\frac{dq}{dh}=\frac{dU}{dh} \tag{6}$$

Dus:

$$\frac{dU}{dh}=\frac{a}{c}\left(\frac{1}{h-m_v-b}\right) \tag{7}$$

Na integratie volgt:

$$U=\frac{a}{c}\,ln(-h+m_v+b)+C_1 \tag{8}$$

Uitgaande van een hyperbolisch verloop van de overdrachtsfactor komt dus een logaritmisch verband naar voren tussen de afvoer per oppervlakte eenheid en de freatische grondwaterstand.

De relatie tussen afvoer en grondwaterstand volgens Ernst

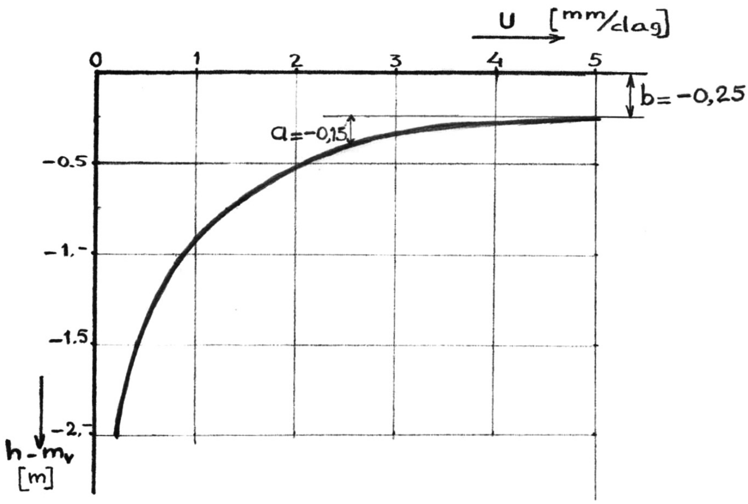
Er is eerder onderzoek gedaan naar de relatie tussen oppervlaktewater afvoer en de freatische grondwaterstand (Ernst, 1971). In dit onderzoek wordt voor de vrij afwaterende gebieden in zuidoostelijk Nederland de relatie tussen afvoer per eenheidsoppervlak en de freatische grondwaterstand als oppervlak gemiddelde waarde voor stationaire situaties gekarakteriseerd met een sterk niet lineair verloop. Ernst voerde hierbij aan dat de voornaamste reden voor dat sterk niet lineaire verloop is gelegen in het feit dat de slootdichtheid (totale lengte van alle watervoerende sloten per oppervlakte eenheid) tamelijk sterk afneemt als het freatisch vlak wordt verlaagd.
Ernst presenteerde twee relaties, ik heb de relatie genomen die is gebaseerd op directe metingen. Ernst voerde in het genoemde artikel op deze relatie een voorbeeld-

berekening uit. Hij bepaalde op grafische wijze bijvoorbeeld de drainageweerstand. Ik maak in mijn onderzoek gebruik van dezelfde informatie ter zake van afvoer en grondwaterstand. In afbeelding 2 heb ik de door Ernst gebruikte relatie weergegeven. Ik heb de relatie overgenomen uit de genoemde publicatie van Ernst. De afbeelding in deze publicatie is echter tamelijk klein weergegeven maar ik heb getracht zo goed mogelijk de karakteristieken van de relatie te bepalen.
Door opmeting heb ik vastgesteld dat voor :

$U = 5\ \frac{mm}{dag}$, dan is $b = -\ 0{,}25\ m$

en als:

$U = \frac{1}{2} * 5\ \frac{mm}{dag}$, dan is $a = -\ 0{,}15\ m$



Afbeelding 2: Relatie tussen afvoer per eenheidsoppervlak en het freatisch peil (Ernst, 1971).

Vergelijking van de relaties tussen afvoer en freatische grondwaterstand

De relatie die is verkregen met als basis het hyperbolische verloop van de overdrachts-factor vergelijking (8) kan ik vervolgens matchen met de relatie van Ernst.

Hiervoor geldt dat als:

$h - m_v = a + b$, dan is $U = \frac{1}{2}\, j$

waarbij j de waarde van U is op $h - m_v = b$.

Substitutie van deze voorwaarde in vergelijking (8) geeft:

$$C_1 = \frac{1}{2}\, j - \frac{a}{c}\, ln(-a) \tag{9}$$

Daarmee wordt na substitutie van C_1 in vergelijking (8);

$$U = \frac{1}{2}\, j + \frac{a}{c} \left\{ ln \left(\frac{-h + m_v + b}{-a} \right) \right\} \tag{10}$$

In de relatie van Ernst is:

$$j = 5 * 10^{-3}\ \frac{m}{dag}$$

en tevens

$a = -0{,}15\ m$ en $b = -0{,}25\ m$

Indien ik deze waarden substitueer in vergelijking (10) wordt de volgende relatie verkregen:

$$U = 2{,}5 * 10^{-3} + \frac{-0{,}15}{c} \left\{ ln \left(\frac{-h + m_v - 0{,}25}{0{,}15} \right) \right\} \tag{11}$$

Ernst bepaalde aan de hand van de gemeten relatie dat op een grondwaterstandsdiepte van 1,05 meter de afvoer van het oppervlaktewater systeem overeen komt met:

$$U = 0{,}8 * 10^{-3}\ m/dag$$

Substitutie van deze waarden voor U en de grondwaterstand in vergelijking (11) levert de waarde voor de hydraulische weerstand van de scheidende laag:

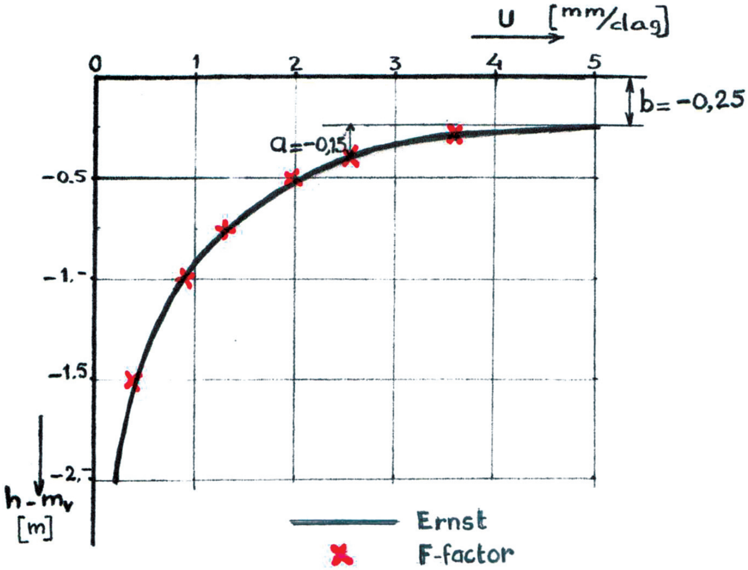
$$c = 147{,}7 \approx 150\ dagen$$

Hiermee wordt de relatie tussen de oppervlaktewater afvoer en de grondwaterstand, met als uitgangspunt het logaritmisch verloop van vergelijking (8) de volgende vergelijking:

$$U = 2{,}5 * 10^{-3} - ln \left(\frac{-h + m_v - 0{,}25}{0{,}15} \right) * 10^{-3} \tag{12}$$

In afbeelding 3 is voor een aantal grondwaterstanden de bijbehorende afvoer berekend uitgaande van vergelijking (12). De berekende punten vallen vrijwel exact samen met de relatie die Ernst gebruikte. Kennelijk heeft de gemeten relatie in (Ernst, 1971) een logaritmisch verloop.

Ik meen op basis van het bovenstaande te kunnen concluderen dat het hyperbolisch verloop voor de overdrachtsfactor in de vrij afwaterende gebieden in het zuidoosten van Nederland fysisch goed onderbouwd kan worden.



Afbeelding 3: Berekende waarden met de hyperbolische overgangsfactor.

De relatie tussen drainageweerstand, hydraulische weerstand en grondwaterstand

In (Ernst, 1971) wordt de drainageweerstand gedefinieerd waarvoor geldt:

$$\frac{dU}{dh} = \frac{1}{\gamma} \tag{13}$$

waarbij γ met de dimensie $[dagen]$ uiteraard afhangt van de grondwaterstand.

Dit betekent dat vergelijking (7) ook geschreven kan worden als:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{a}{c}\left(\frac{1}{h - m_v - b}\right) \tag{14}$$

Enkele karakteristieke waarden van grondwaterstanden, de drainageweerstand en de hydraulische weerstand zijn de volgende:

Indien $h - m_v = a + b$, dan is $\gamma = c$

Dus voor een grondwaterstand op een diepte van 0,4 m geldt dat de drainageweerstand zoals Ernst die gebruikte gelijk is aan de hydraulische weerstand van 150 dagen in het geval de bovenbeschreven relatie met de bekende waarden voor a en b geldig is.

Indien $h - m_v = b - 1$, dan is $\gamma = \frac{c}{a}\,(b - 1 - \ b) = -\,\frac{c}{a}\, * 1\, m$

Dus voor een grondwaterstand op een diepte van 1,25 m geldt dat de drainageweerstand gelijk is aan 1000 dagen in het geval van de boven beschreven relatie met de bekende waarden voor a en b.

Ernst (1971) gebruikte drainageweerstanden om in het geval van stroming naar een put het analytische probleem op te splitsen in een aantal deelproblemen. Ieder deelprobleem behandelde hij als een De Glee-probleem waarbij de oplossing te schrijven is met behulp van Besselfuncties. In de tijd dat Ernst de oplossingen publiceerde had hij nog niet de beschikking over digitale rekenfaciliteiten waarover wij thans wel beschikken. Toch wist hij op een uiterst gedegen wijze oplossingen te vinden voor tal van grondwaterstromingsproblemen. Van der Gaast (2014) beschrijft deze methode en stelt dat het gebruik van de drainageweerstand een betere fysische basis kent dan de door mij gepresenteerde methodiek.
Over dit laatste verschil ik van mening met hem om de volgende reden. Ik ben uitdrukkelijk uitgegaan van een gebiedsgemiddelde grondwaterstand. In dat geval is er geen sprake van een drainageweerstand. Ernst ging eveneens uit van gebiedsgemiddelde grondwaterstanden in zijn $U(h)$-relatie. Hij had echter in zijn methodiek een extra weerstand nodig, die bovendien afhangt van de diepte van de grondwaterstand, om een gesloten oplossing met Besselfuncties te realiseren. Deze extra weerstand noemde hij de drainageweerstand alhoewel strikt genomen niet van een drainageweerstand kon worden gesproken.

Gezien de bovenstaande vergelijking (14) vraag ik mij af of de drainageweerstand niet zou kunnen worden vervangen in analytische berekeningen maar ook in numerieke modellen in geohydrologische situaties zoals in deze publicatie worden beschouwd, dus vrij afwaterende zandige gebieden zoals we die kennen in het zuidoosten en oosten van Nederland. De drainageweerstand is in het geval van het rekenen met gebiedsgemiddelde grondwaterstanden tamelijk kunstmatig en mist een goede fysische onderbouwing.

De rol van verdampingsreductie

Zoals eerder vermeld heb ik de “voeding” uit de verdampingsreductie in de beschouwingen niet meegenomen. Ik heb deze term in de waterbalans verwaarloosd ten opzichte van de rol die het oppervlaktewatersysteem speelt. Voor een eerste benadering is dit naar mijn mening geoorloofd. Dit wil echter niet zeggen dat er geen effect is op de grootte van de verdamping. De berekening van de landbouwschade als gevolg van grondwateronttrekking gaat immers via de bepaling van de verdampingsreductie. Ernst (1971) stelde in de eerder genoemde publicatie dat de verdampingsreductie de omvang heeft van ongeveer 10% van de diepe winning in het zuidoostelijke gebied van Nederland en hij onderbouwt dat met een berekening.

Aanbeveling

Op basis van de gepresenteerde berekeningstechniek is het relatief eenvoudig een berekening uit te voeren van het verloop van de trendmatige verlaging van de grond-

waterstand en de grondwaterstijghoogte in vrij afwaterende gebieden in het zuidoosten van Nederland, mits de onttrekkingen aan het diepe pakket bekend zijn.
Voor de onttrekkingen ten behoeve van de drinkwatervoorziening is deze informatie beschikbaar. In een volgende editie van "Stromingen" zal ik de resultaten van deze berekeningen presenteren. Het verdient aanbeveling de gepresenteerde rekentechniek in te bouwen in een grondwatermodel en te onderzoeken of de resultaten overeenkomen met de meer traditionele aanpak.

Conclusies

Het gebruik van een hyperbolische overdrachtsfactor in regionale grondwaterstudies heeft een goede fysische basis voor vrij afwaterende gebieden en kan prima gebruikt worden voor de bepaling van trendmatige verlagingen ten gevolge van diepe grondwateronttrekkingen

Referenties

Akker, C. van den (2013) Tussen Dupuit en De Glee; in: *Stromingen* JRG 19 nr 2

Ernst, L.F. (1971) Analysis of groundwater flow to deep wells in areas with a non-linear function for the subsurface drainage; in: *Journal of Hydrology 14*

Gaast, J. van der (2013) Grondwaterwinningen nader beschouwd; in: *Stromingen* JRG 19 nr 3&4