Reactie op artikel "Tussen Theis en Hantush" van Cees van den Akker

Hans Leenen[1]

Hierbij wil ik reageren op het artikel "Tussen Theis en Hantush" van Van den Akker (2014b). Ik ben tot de conclusie gekomen dat er zaken in staan die fysisch-mathematisch niet kloppen. Dat heeft consequenties voor de analyse die Van den Akker presenteert. De materie acht ik belangrijk genoeg om hier een open discussie over te houden. In het bewuste artikel presenteert Van den Akker een niet-stationaire analyse voor zijn eerder gepubliceerde theorie over achtergrondverlaging (Van den Akker 2013, 2014a). De artikelen gelezen hebbende wil ik aannemen dat er - op de lange termijn - een experimentele niet-lineaire relatie kan bestaan tussen de (gebiedsgemiddelde) daling van de stijghoogte in een watervoerend pakket en een waargenomen (gebiedsgemiddelde) daling van het freatisch grondwater in hetzelfde gebied. Of ik me overal in kan vinden is hier niet belangrijk. Van den Akker (2014b) eindigt zijn niet-stationaire analyse met een oproep aan jonge hydrologen om de afgeleide partiële differentiaalvergelijking op te lossen. Hoewel ik mezelf niet meer tot die groep reken, werd ik getriggerd om me er ook in te verdiepen. Daarbij kom ik tot de conclusie dat op verschillende manieren valt in te zien dat de gepresenteerde differentiaalvergelijking niet klopt en dat de achterliggende theorie, in ieder geval voor de niet-stationaire situatie, niet opgaat. Als iemand mij er van kan overtuigen dat ik hier wat over het hoofd zie, of juist tot een vergelijkbaar inzicht komt, lijkt het me de moeite waard om dat te communiceren. We willen immers als NHV met zijn allen vooruit.

Waar gaat het om?

1. De afleiding van de bewuste differentiaalvergelijking is niet correct en blijkt tot een term te leiden die er niet in thuishoort. Daardoor is het vervolg van de analyse feitelijk niet meer aan de orde.
2. Van den Akker (2013, 2014a) introduceerde een relatie tussen stijghoogteverandering en daling van freatisch grondwater die op de lange termijn optreedt. In de niet-stationaire analyse van Van Den Akker (2014b) wordt die relatie echter als instantaan effect beschouwd, wat leidt tot een fysisch onmogelijke situatie.

Verkeerde term in differentiaalvergelijking

In het artikel wordt de volgende vergelijking afgeleid voor de beschrijving van het niet-

[1] Royal HaskoningDHV, Amersfoort (hans.leenen@rhdhv.com)

stationaire systeem van een putonttrekking in een watervoerend pakket met semi-spanningswater. Daarbij is het freatisch niveau niet constant zoals in de bekende vergelijking van Hantush, maar een variabele (er staat overigens in het bewuste artikel voor de 3e term een verkeerd teken).

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{h-\varphi}{kHc} - \frac{s}{kH}\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\mu}{kH}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

1 2 3 4 5

Waarbij:
φ : stijghoogte [m]
h : freatische grondwaterstand [m]
r : afstand tot de put [m]
kH : doorlaatvermogen van het watervoerend pakket [m^2/dag]
c : hydraulische weerstand van de scheidende laag [dagen]
s : freatische bergingscoëfficiënt [-]
μ : elastische bergingscoëfficiënt [-]

De variabiliteit van het freatisch niveau beschrijft Van den Akker met een relatie tussen φ en h: $\frac{dh}{d\varphi} = F$, waarin F de zogenaamde overdrachtsfactor voorstelt, die (volgens mondelinge communicatie, want het staat niet in de artikelen) instantaan zou gelden. Volgens deze aanname zou een zekere stijghoogteverlaging $\Delta\varphi$ die in een tijd Δt optreedt, in die zelfde tijd Δt resulteren in een verlaging van het freatisch niveau van $F\Delta\varphi$. Op de fysische realiteitszin hiervan kom ik later terug.

De vergissing die in de afleiding van de vergelijking is geslopen, zit in de flux door de scheidende laag die gelijk moet zijn aan het potentiaalverschil gedeeld door de weerstand: $\frac{h-\varphi}{c}$. Zo is die flux nou eenmaal gedefinieerd (er van uitgaande dat er geen berging in de scheidende laag bestaat). Het maakt daarbij ook niet uit of de freatische grondwaterstand fluctueert of niet. Die grondwaterstand kan immers ook als variabele in dat potentiaalverschil zitten. De bergingsveranderingssnelheid van het freatisch grondwater, die in de 4e term van de vergelijking verschijnt als $-\frac{s}{kH}\frac{\partial h}{\partial t}$ kan niet als een extra flux worden opgenomen in de waterbalans van het watervoerend pakket daaronder zoals Van den Akker in zijn afleiding doet. Dat is zogezegd dubbelop. Dat de freatische grondwaterstand door Van den Akker als een variabele wordt geïntroduceerd, verandert eigenlijk niets aan de afleiding van Hantush voor de situatie met een vast freatisch niveau. Wat er ook met die freatische grondwaterstand mag gebeuren, het eventuele bergingsveranderingsproces van het freatisch grondwater zit voor wat betreft de relatie met een flux naar het watervoerend pakket al opgenomen in de 3e term van de vergelijking $\frac{h-\varphi}{kHc}$, waarin dus zowel φ als h variabel kunnen zijn.

Wat Van den Akker wil afleiden is eigenlijk niets anders dan de vergelijking van Hantush met dien verstande dat de freatische grondwaterstand daarbij als een variabele wordt opgenomen in plaats van als constante. De conclusie is dat de 4e term niet in de vergelijking thuis hoort. Door die er uit te halen, reduceert de vergelijking tot wat hij moet zijn, nl. de Hantush-vergelijking met variabel freatisch niveau. Hoe dat freatisch niveau kan variëren, bijvoorbeeld dalen als functie van omgevingsparameters, laat ik hier in het midden. Er is in ieder geval een extra relatie nodig om dan het systeem met de twee variabelen van stijghoogte en freatische grondwaterstand simultaan op te lossen.

Een klein gedachtenexperiment mag een en ander misschien nog wat verhelderen. Laten we terug gaan naar de situatie waarbij onbeperkt oppervlaktewater beschikbaar is en het freatisch peil constant kan blijven bij een onttrekking uit het watervoerend pakket. Dat levert dus de bekende differentiaalvergelijking van Hantush op. Nu blijkt op een gegeven moment dat het oppervlaktewater niet onbeperkt beschikbaar is, waardoor het freatisch niveau niet meer vast gehouden kan worden en gaat dalen. Verandert dat wat aan de drijvende krachten in de waterbalans van het watervoerend pakket? In geen enkel opzicht. De drijvende kracht in de flux (=wegzijgingssnelheid) door de scheidende laag blijft nog steeds het potentiaalverschil, maar nu met dien verstande dat het freatisch niveau niet meer constant is. Uit continuïteitsoverwegingen moet de flux door de scheidende laag daarbij gelijk zijn aan de afname van de oppervlaktewaterafvoer U plus de bergingsveranderingssnelheid van het freatisch grondwater. In het geval van een vast freatisch peil zou de flux als gevolg van de onttrekking gelijk zijn aan alleen de afname van U.

Van den Akker geeft in dit voorliggende nummer van Stromingen een nadere toelichting op zijn oorspronkelijke artikel waarop ik hier reageer. In vergelijking 4 van die toelichting verschijnen in de 3e en 4e term de afname van de oppervlaktewaterafvoer en de bergingsveranderingssnelheid van het freatisch grondwater. Uit de waterbalans volgt zoals hiervoor al aangegeven, dat de som van die twee termen gelijk is aan de flux $\frac{h-\varphi}{c}$. Daarmee bevestigt de toelichting van Van den Akker dat de 4e term die in de oorspronkelijke vergelijking staat (in mijn reactie hier is dat vergelijking 1), er niet in thuis hoort, want daarmee zou bergingsveranderingssnelheid $-\frac{s}{kH}\frac{\partial h}{\partial t}$ er dubbel in voorkomen.

De gepresenteerde theorie spoort niet met de werkelijke fysica

Van den Akker heeft een relatie afgeleid die een daling van de stijghoogte relateert aan een instantane daling van het freatisch niveau met een factor F die een waarde tussen 0 en 1 heeft. In wiskundige terminologie is F dus $O(1)$, ofwel van grootte-orde 1. Op de lange termijn kan er misschien een dergelijke relatie bestaan - die discussie laat ik hier buiten beschouwing - maar instantaan kan het fysisch niet juist zijn.

Indien instantaan zou gelden dat:

$\frac{dh}{d\varphi} = F$, dan geldt ook:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = F\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad (2)$$

waarin $\frac{\partial h}{\partial t}$ de dalingssnelheid van het freatisch grondwater voorstelt.

Maar ….. de daling van het freatisch niveau vermenigvuldigd met de freatische bergingscoëfficiënt kan nooit sneller gaan dan de wegzijging door de scheidende laag, in formulevorm:

$$-s\,\frac{\partial h}{\partial t} \leq \frac{h-\varphi}{c} \tag{3}$$

Uitgaande van de relatie zoals Van den Akker presenteert, zou het freatisch niveau moeten dalen met een snelheid die fysisch onmogelijk is. Een simpel getallenvoorbeeld mag dat illustreren. Stel:

c : 150 dagen
$h - \varphi$: 1,5 m
s : 0,333
Q : 20000 m^3/dag (= onttrekking uit watervoerend pakket)
kD : 5000 m^2/dag

dan is de flux vanuit het freatisch grondwater naar het watervoerend pakket dus:

$$\frac{h-\varphi}{c} = 1 \text{ cm/dag}$$

en dus moet gelden (met s = 0,333) dat:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \leq 3 \text{ cm/dag}$$

De genoemde onttrekking geeft na 80 seconden op 10 m afstand van de put al een stijghoogteverlaging van 1,5 m (volgens Hantush-vergelijking), overeenkomend met een gemiddelde daalsnelheid over die tijdsduur van 162000 cm/dag. (NB: kijk je naar de eerste seconden, dan is de daalsnelheid nog veel groter: 5 seconden na de start van de onttrekking is er op 10 m afstand al een stijghoogtedaling van 0,6 m).

Volgens de theorie van Van den Akker met $\frac{\partial h}{\partial t} = F\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ is F van ordegrootte 1. Maar dat zou voor het freatisch niveau een daalsnelheid moeten geven die fysisch volstrekt onmogelijk is. Immers, die daalsnelheid is (in dit rekenvoorbeeld) begrensd door 3 cm/dag (en feitelijk nog kleiner omdat deze snelheid pas geldt als de verlaging van 1,5 m is bereikt). Indien de relatie wel op zou gaan, leidt het tot een maximaal mogelijke waarde van F van 0,000019. Dat spoort niet meer met de eigen theorie die stelt dat F van ordegrootte 1 is. (NB: Dit is maar een getallenvoorbeeld. De onttrekking kan op een willekeurig moment worden gestart, dus ook op het moment dat de freatische grondwaterstand onder de drainagebasis ligt, en er geen enkele oppervlaktewater-voeding optreedt. Volgens de theorie van Van den Akker zou F dan tegen 1 aan zitten).

Je kunt nog op een andere manier tegen de implicaties van de verschillende termen van de differentiaalvergelijking aankijken, waaruit wederom blijkt dat die niet juist kan zijn. Uit de hierboven gegeven relatie (2) volgt dat de 4^e term in vergelijking (1) geschreven kan worden als $\frac{Fs}{kH}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Je ziet dan direct in dat de 5^e term verwaarloosbaar is ten opzichte van de 4^e term, immers $Fs \gg \mu$. Met andere woorden: de 5^e term met de elastische berging zou in een niet-stationaire situatie geen rol van betekenis spelen. Dat klopt niet met de werkelijke fysica, want we weten met alle pompproeven die we in Nederland hebben wel beter. De conclusie is ook langs deze weg dat de 4^{e} term niet in de differentiaalvergelijking thuis hoort. Zelfs als wel de juiste differentiaalvergelijking gehanteerd zou worden, blijft het punt van de fysisch onmogelijke instantane overdrachtsfactor. De gepresenteerde theorie kan dus niet van toepassing zijn op een niet-stationaire situatie van een putonttrekking.

Literatuur

Van den Akker (2013) Tussen Dupuit en De Glee; in: *Stromingen*, vol 19, nummer 2, pag 5-23

Van den Akker (2014a) Een fysische onderbouwing van de overdrachtsfactor; in: *Stromingen*, vol 20, nummer 1, pag 5-13

Van den Akker (2014b) Tussen Theis en Hantush; in: *Stromingen*, vol 20, nummer 2, pag 33-38