

Een statistische kijk op de betrouwbaarheid van tijdreeksmodellen

Arnold Heemink
TU Delft

Wat is betrouwbaarheid hier

Een betrouwbaar model is een model dat een goede beschrijving geeft van de werkelijkheid.

Bij tijdreeksmodellen willen we in ieder geval dat het model goed “past” bij de data: In de meetgegevens is geen indicatie dat het model geen goede beschrijving van de werkelijkheid zou zijn.

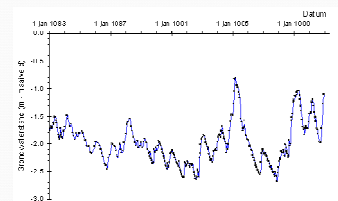
Een betrouwbaar model hoeft dus geen nauwkeurige voorspellingen te produceren

Overzicht

- Formulering van een tijdreeksmodel: Het ARMA(p,q) model
- Aannames bij een tijdreeksmodel die gebaseerd zijn op proces kennis en die moeilijk getoetst kunnen worden
- Aannames bij een tijdreeksmodel die statistisch getoetst kunnen worden
- Enkele voorbeelden van statistische toetsen
- Uitbreidingen en nieuwe ontwikkelingen

Wat is een tijdreeks

Een tijdreeks is een serie waarnemingen van dezelfde grootte op verschillende tijdstippen.



Voorbeeld van een tijdreeks van grondwaterstanden

Wat is een tijdreeksmodel

Het doel van een tijdreeksmodel is het scheiden van de structuur in de reeks van de toevalligheden.

Op basis van de structuur kunnen voorspellingen berekend worden, de toevalligheden zijn onvoorspelbaar.

Een bekend tijdreeksmodel voor een grootte $u(k)$ is het ARMA(p,q) model:

$$u(k) = a_1 * u(k-1) + a_2 * u(k-2) + \dots + w(k) - b_1 * w(k-1) - \dots$$

met $w(k)$ als de onvoorspelbare ruis. $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ zijn de parameters van het model.

Aannames die moeilijk te toetsen zijn

- Lineair model. Bij niet-lineaire verbanden kunnen de metingen eventueel eerst getransformeerd worden
- Stationair model. Bij niet-stationaire reeksen zijn er veel aanpassingen mogelijk: Verwijderen trend, overgaan op verschilreeksen (ARIMA modellen), toepassen transformatie

Deze aannames zijn allemaal moeilijk statistisch te toetsen. Hiervoor is proces kennis onmisbaar.

Aannames die statistisch getoetst kunnen worden

Bij een betrouwbaar tijdreeksmodel zijn alle structurele patronen gemodelleerd en is de ruis onvoorspelbaar. En dit laatste kan statistisch gecontroleerd worden.

Met behulp van de meetgegevens kunnen eerst de parameters van het model worden geschat.

Door het model vervolgens toe te passen op de meetreeks kan de ruis $w(k)$ worden berekend. Als het model goed is moet dit ruis proces wit zijn: Opeenvolgende waarden moeten onafhankelijk van elkaar zijn.

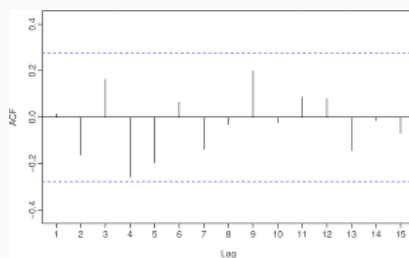
Witte ruis

Witte ruis heeft een constante variantie en is ongecorreleerd in de tijd en heeft dus een hele eenvoudige autocorrelatiefunctie:

$$\begin{aligned} \text{ACF}(0) &= 1, \\ \text{ACK}(\text{Lag}) &= 0 \text{ voor alle waarden van } \text{Lag} \neq 0 \end{aligned}$$

Als we eerst een witte ruis proces genereren en dan de autocorrelatie functie uitrekenen krijgen we nooit precies weer de bovenstaande autocorrelatiefunctie.

Autocorrelatiefunctie (ACF) van witte ruis geschat uit metingen



Een test op witte ruis

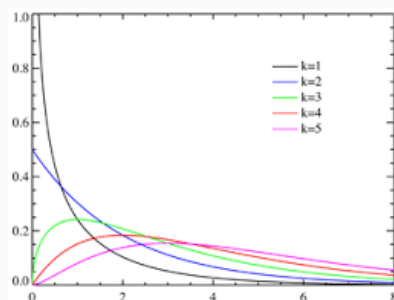
Een bekend resultaat uit de statistiek is:

Als er N meetgegevens beschikbaar zijn voor het bepalen van het tijdreeksmodel dat dan bij een "goed" model moet gelden dat:

$$Q = N \sum_{\text{Lag}=1}^h \frac{N+2}{N-p-q} * (\text{ACF}(\text{Lag}))^2$$

$\chi^2(k)$ verdeeld is met $k=h-p-q$ vrijheidsgraden.

χ^2 verdeling met k vrijheidsgraden



Een test op witte ruis

Nadat er een model gevonden is kunnen we de ruis uitrekenen en vervolgens de eerste h autocorrelaties van de ruis en tenslotte Q . Deze waarde van Q zou een realisatie moeten zijn van de $\chi^2(k)$ kansverdeling, met $k=h-p-q$.

We berekenen nu de kans ξ dat $\chi^2(k) \geq Q$

Als ξ heel klein is zijn de correlaties te groot en is er nog te veel structuur in de ruis.

Als ξ heel groot is zijn de correlaties te klein, kleiner dan statistisch mogelijk is. Het model heeft nu te veel parameters en er is nu een deel van de ruis gemodelleerd als structureel.

Het "beste" model

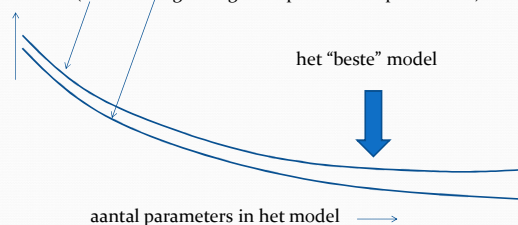
Het beste model lijkt in eerste instantie het model te zijn waarbij de onvoorspelbare ruis zo klein mogelijk is.

Echter: Hoe meer parameters het model heeft hoe meer mogelijkheden er zijn om de data te verklaren met als risico dat daarmee ook toevalligheden als structurele patronen worden gemodelleerd.

Dus: Er moet dus nog wel gecorrigeerd worden op het effect dat bij het toevoegen van nieuwe parameters aan het model altijd een kleinere ruis overblijft

Variantie van de ruis als functie van het aantal model parameters

Variantie (wel en niet gecorrigeerd op het aantal parameters)



Een voorbeeld

Beschouw het ARMA(3,1) model:

$$u(k) = 0.6 \cdot u(k-1) - 0.7 \cdot u(k-2) + 0.6 \cdot u(k-3) + w(k) - 0.6 \cdot w(k-1)$$

met gemiddelde 0 en variantie van $w(k)$: 10.

We genereren nu 100 waarnemingen en identificeren een tijdreeksmodel met deze waarnemingen.

Criteria voor de modelkeuze

ARMA(2,1): aantal parameters 4, variantie $w(k)$ 9.6, variantie gecorrigeerd voor het aantal parameters 9.8, $\xi=0.005$

ARMA(3,1): aantal parameters 5, variantie $w(k)$ 8.1, variantie gecorrigeerd voor het aantal parameters 8.4, $\xi=0.75$

ARMA(4,1): aantal parameters 6, variantie $w(k)$ 8.1, variantie gecorrigeerd voor het aantal parameters 8.4, $\xi=0.80$

ARIMA(2,1,1): aantal parameters 3, variantie $w(k)$ 8.5, variantie gecorrigeerd voor het aantal parameters 8.7, $\xi=0.75$

Tot slot

Tijdreeksmodellering is een krachtige methodiek:

- Generiek toepasbaar
- Voorzien van vele statistische tools die helpen bij het formuleren van een betrouwbaar model
- Complexiteit van het model "past" bij de beschikbare meetgegevens: Hoe meer gegevens hoe meer structurele verbanden in het model kunnen worden opgenomen

Het ARMA(p,q) model is een basis model. Er zijn vele uitbreidingen mogelijk: ARIMA modellen, transfermodellen, seizoenmodellen, ...

Proces kennis blijft essentieel.

Tot slot

Een nieuwe ontwikkeling is het gebruik van (numerieke) proces modellen bij het modelleren van ruimte-tijd processen: Data assimilatie.

Uitgangspunt is een bestaand numeriek model.

Geïnspireerd door de aanpak bij de tijdreeksmodellen:

- AR model voor het modelleren van systeem ruis
- Parameterizatie die past bij de beschikbare data
- Residu monitoring

Open source software (openDA) beschikbaar, ontwikkeld door Deltares, VORtech, TNO, DHI en de TUD.