Reactie op 'Extreme afvoer vanuit de reservoircoëfficiënt' van Bram Bot

KLAAS METSELAAR

Bot (2022) analyseert de relatie tussen de extreme afvoer en de kritieke duur van een bui en laat zien dat via de reservoircoëfficiënt en de relatie tussen intensiteit en duur de kritieke duur en daarmee de extreme afvoer geschat kunnen worden. De iteratieve en grafische benaderingen door Bot (2022) kunnen worden aangevuld met verdere grafische weergaven of expliciet geschreven gesloten vergelijkingen. Hierdoor kunnen twee vragen in het artikel van Bot beantwoord worden en is een iteratieve oplossing niet vereist.

Bot (2022) legt een link tussen de intensiteit, de duur van de regenval en de piekafvoer. Hij houdt het bewust eenvoudig en veronderstelt dat het hydrologisch systeem reageert als een lineair reservoir, en dat de intensiteit van de regenval met een macht B van de duur afneemt. Hij gaat daarbij uit van de volgende vergelijking voor afvoer aan het eind van een bui van duur d:

$$Q_d = \frac{A}{d^B}\left(1 - e^{-\frac{d}{j}}\right) \tag{1}$$

De piekafvoer volgt door het nulstellen van de afgeleide van de afvoer naar de duur van de regenval. De duur van de bui waarbij de afvoer maximaal is (d) wordt door Bot bij gegeven B en j, iteratief bepaald uit:

$$B = e^{-\frac{d}{j}}\left(B + \frac{d}{j}\right) \tag{2}$$

d = duur van de kritieke bui
j = reservoircoëfficiënt
B = een klimaatafhankelijke parameter (niet erg gevoelig voor de herhalingstijd) die het verband beschrijft tussen intensiteit, duur en frequentie.

Bot merkt op dat hij geen expliciete oplossing heeft kunnen bedenken voor de relatie tussen B en d/j. d/j als functie van B is niet eenvoudig, maar B als functie van d/j bij de maximale afvoer volgt uit vergelijking (2) als:

$$B = \frac{\frac{d}{j}}{e^{\frac{d}{j}} - 1} \tag{3}$$

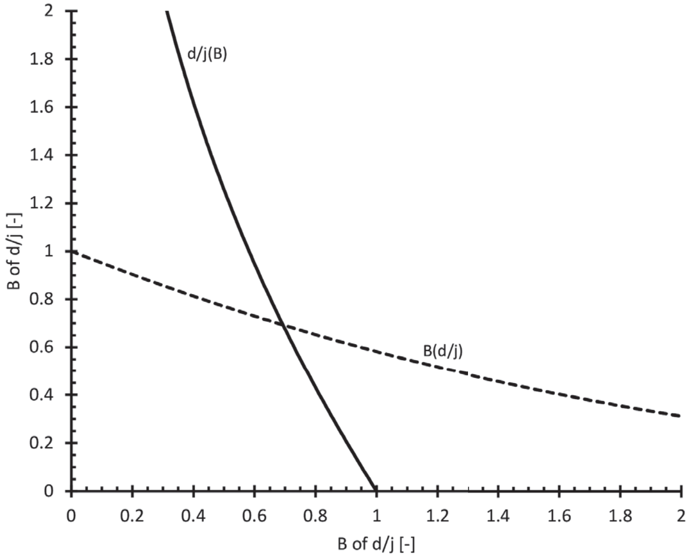
Bij gegeven d/j is op basis van vergelijking (2) B ook bekend, en kan de maximale afvoer Q_{max} als functie van d/j berekend worden:

$$Q_{max} = \frac{A}{d^B}\left[1 - e^{-\frac{d}{j}}\right] = F\frac{A}{j^B} \qquad (4)$$

waarbij de factor *F* berekend wordt als:

$$F = \left(\frac{d}{j}\right)^{-B}\left[1 - e^{-\frac{d}{j}}\right] \qquad (5)$$

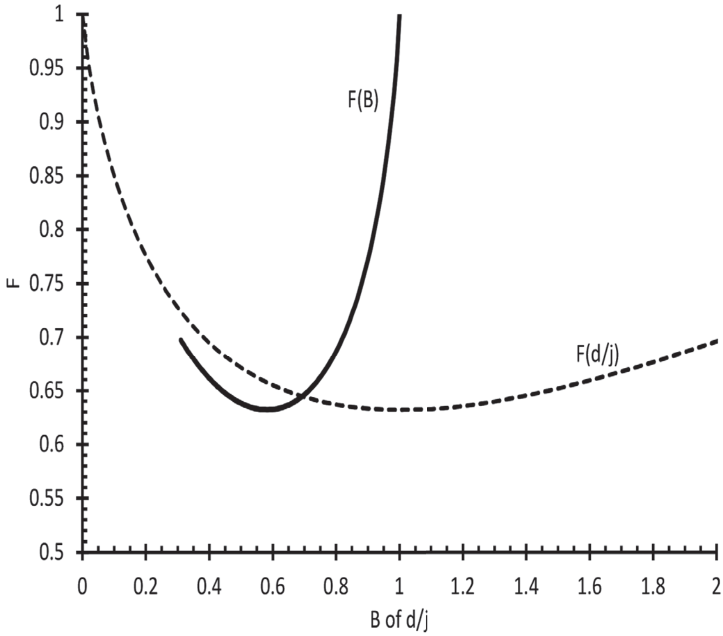
Het probleem is dat bij gegeven herhalingstijd en in een bepaald klimaat, gekarakteriseerd door de waarde van *B*, *d/j* eerder de onbekende is, en een functie van *B*. De parameter *B* (*B* tussen 0 en 1) als functie van *d/j* (berekend met vergelijking 2) is in afbeelding 1 gegeven. Als we nu *d/j* als functie van B willen weten, kunnen we in afbeelding 1 voor een *B* (op de y-as) de bijbehorende waarde van *d/j* op de x-as terugzoeken. We kunnen ook (en dat is in een spreadsheetprogramma eenvoudig te doen) *d/j* als functie van *B* weergeven (zie afbeelding 1). Daarmee zijn zowel *B*(*d/j*) als *d/j*(*B*) grafisch weer te geven.



Afbeelding 1: *De functie B(d/j) (onderbroken lijn, op het interval (0;2)) en de functie d/j(B) (doorgetrokken lijn, op het interval (0.3;1)). Voor de functie B(d/j) moet de x-as als d/j gelezen worden, en de y-as als B; voor de functie d/j(B) is de x-as de B-waarde, en de y-as de d/j waarde.*

De parameter *F* is gegeven als gesloten uitdrukking van *d/j*, en kan gebruikmakend van *B*(*d/j*) ook weergegeven worden als functie van *B* (zie afbeelding 2).

Afbeelding 2: *De functie F(d/j) (onderbroken lijn, op het interval (0;2)) en de functie F(B) (de doorget-*



rokken lijn, op het interval (0.3;1)) voor berekening van de maximale afvoer

De relevante waarden kunnen uit de afbeeldingen 1 en 2 afgelezen worden, en de berekeningen zijn eenvoudig te verfijnen of uit te breiden. Bovenstaande grafische aanpak voor *d/j*(*B*) en *F*(*B*) kan ook vervangen worden door berekeningen. Een gesloten expliciete uitdrukking voor *d/j* als functie van *B*, en daarmee ook voor *F*, op basis van vergelijking 1 kan worden geschreven als:

$$\frac{d}{j} = -W_{-1}\left(-Be^{-B}\right) - B \qquad (6)$$

Substitutie van (6) in (5) beschrijft *F* als functie van *B*. Daarbij is W_{-1} een tak van de Lambert W- of product-logaritmefunctie, met het argument gedefinieerd op het interval (-1/e; 0), of, in dit geval, voor *B* op het interval (0;1). Omdat Bot ernaar streeft de analyse eenvoudig te houden, is verdere uitwerking van de functie W (bijvoorbeeld via een reeksontwikkeling) minder zinvol. Interessant is nog wel dat de eerste term van de reeksontwikkeling voor $W_{-1}(x)$ -ln(-*x*) is, waarmee de benadering van *d/j*(*B*) en *F*(*B*) door gebruik van ln(*B*) door Bot begrijpelijk wordt. Bot vermoedt dat de natuurlijke logaritme de functie $W_{-1}(x)$ benadert. Dat is jammer genoeg niet zo. Voor meer informatie over W(*x*) wordt verwezen naar Corless e.a. (1996). Een nauwkeurige benadering van $W_{-1}(x)$ wordt gegeven door Barry e.a. (2000). De iteratieve en grafische oplossingen in Bot (2022) kunnen op basis van de bovenstaande aanpak aangevuld worden met verdere grafische oplossingen of expliciet te schrijven vergelijkingen.

Literatuur

Barry D.A., J.-Y. Parlange , L. Lia, H. Prommer, C.J. Cunningham en F. Stagnitti (2000) Analytical approximations for real values of the Lambert W-function, in: *Mathematics and Computers in Simulation*, vol 53, pag 95–103.
Bot, B. (2022) Extreme afvoer vanuit de reservoircoëfficiënt, in *Stromingen*, vol 28, pag 91-98.
Corless, R.M., G.H. Gonnet, D.E. Hare, D.J. Jeffrey en D.E. Knuth (1996) On the Lambert W function, in: *Advances in Computational Mathematics*, vol 5, pag 329– 359.

Auteurs

KLAAS METSELAAR
Wageningen universiteit
Klaas.metselaar@wur.nl