

# De curve-number vergelijking afgeleid uit een ogenblikkelijke eenheidsafvoergolf

KLAAS METSELAAR

De curve-number vergelijking wordt in bepaalde programmatuur als basisvergelijking gebruikt voor de berekening van directe afstroming uit regenval. Daarnaast is ze een vast onderdeel van hydrologische tekstboeken. Het is mogelijk om de vergelijking af te leiden op een manier die laat zien wat de relatie is met andere in de afvoerhydrologie gebruikte concepten, met name de ogenblikkelijke eenheidsafvoergolf. Daarnaast laat deze afleiding een beperking van de bestaande curve-number vergelijking zien, en geeft daarmee ook inzicht in de beperkingen van de programmatuur die deze vergelijking gebruikt.

Artikel

## Inleiding

Een onderdeel van de hydrologische theorie rond de relatie tussen neerslag en afvoer is de *curve-number vergelijking*, die een verband beschrijft tussen de cumulatieve directe afstroming en de cumulatieve regenval. De vergelijking geeft op een aantrekkelijk eenvoudige manier inzicht in effecten van landgebruiksverandering op cumulatieve directe afstroming. In de literatuur is daarom heel veel gepubliceerd over deze vergelijking – zo schreven Mishra en Singh (2010) een monografie over dit onderwerp. De curve-number vergelijking is ook de basis voor een aantal modellen in de hydrologie en voor ontwerpsoftware (bijvoorbeeld Garen en Moore, 2005). In hydrologische tekstboeken (zoals Ritzema, 2006) en daarmee in het onderwijs in de hydrologie wordt de curve number geïntroduceerd voordat dieper ingegaan wordt op de ogenblikkelijke eenheidsafvoergolf (*instantaneous unit hydrograph*) en de via regenintensiteit te genereren afvoerverlopen, en complexere regenafvoermodellen. Dit artikel vat een theoretische analyse (Metselaar, 2023) samen.

## Theorie

Voor de theorie van de curve-number vergelijking kan in het hier volgende steeds verwezen worden naar Ritzema (2006). De formule voor de curve-number vergelijking wordt afgeleid door aan te nemen dat de verhouding tussen actuele en maximale berging gelijk is aan de verhouding tussen actuele en maximale afstroming:

$$\frac{F}{S} = \frac{Q}{P \cdot I_a}; P \geq I_a$$

waarbij

$F$  : actuele bergingsindex (mm)

$I_a$  : initieel verlies: regenval die niet tot afstroming komt (mm)

$P$  : cumulatieve regenval over de duur van een gebeurtenis (mm)

$Q$  : cumulatieve directe afstroming (mm)

$S$  : maximale bergingsindex (mm)

Als de actuele bergingsindex wordt berekend als:

$$F = P - I_a - Q$$

volgt hieruit voor de cumulatieve directe afstroming:

$$Q = \frac{(P - I_a)^2}{P - I_a + S} \text{ voor } P \geq I_a, \text{ anders } Q = 0$$

Dit kan ook geschreven worden als:

$$Q = P - I_a - S \left( 1 - \frac{S}{S + P - I_a} \right) \text{ voor } P \geq I_a, \text{ anders } Q = 0$$

Deze vergelijking wordt standaard gereduceerd tot een 1-parametervergelijking door  $I_a$  op  $0,2S$  te stellen. De functie heeft een schuine asymptoot  $(P - I_a - S)$  – de cumulatieve afvoer nadert tot de totale neerslag gecorrigeerd voor initiële verliezen, en een landgebruiksafhankelijke constante. De curve en de asymptoot worden in geschaalde vorm gepresenteerd in Afbeelding 1a.

$S$  is gekoppeld aan de zogenaamde curve-numberwaarde (CN) als

$$S = 25.4 \left( \frac{1000}{CN} - 10 \right)$$

De CN-waarden zijn voor verschillende vormen van landgebruik getabelleerd.

In deze vergelijking heeft de neerslagintensiteit geen effect (meer) op de afstroming. Daarnaast is de voor de afleiding gebruikte aanname lastig inzichtelijk te maken. Andere afleidingen van de curve-number vergelijking veronderstellen dat specifieke processen in het stroomgebied dominant zijn (bv. oppervlakkige afstroming volgens Horton (Hoosyar en Wang, 2016), of afstroming uit een toenemende fractie verzadigd oppervlak (Steenhuis e.a., 1995). De vraag is dan of de curve-number vergelijking ook afgeleid kan worden – niet door een specifiek mechanisme te veronderstellen – maar door aan te sluiten op, of gebruik te maken van, concepten zoals de ogenblikkelijke eenheidsafvoergolf  $h(t)$ , en de convolutie-integraal. Dat blijkt te kunnen als de functie  $h(t)$  de volgende vorm heeft:

$$h(t) = \frac{2k}{(kt+1)^3}$$

waarbij

$h(t)$  : ogenblikkelijke eenheidsafvoergolf (1/s)

$k$  : karakteristieke tijdsconstante van het stroomgebied (1/s)

$t$  : tijd (s)

met  $k$ , de inverse van een voor het stroomgebied karakteristieke tijd  $T^*$  (s). Zie voor het verloop van deze functie Afbeelding 1b. Als bij een constante intensiteit  $p$  (mm/s) in een bui de afvoer na een bepaalde tijd  $t_a$  (s) start, en er geen andere opslag in het stroomgebied plaatsvindt, wordt de convolutie-integraal tussen  $t_a$  en  $t$  geschreven als:

$$\int_{t_a}^t \frac{2kp}{(k(t-\tau)+1)^3} d\tau$$

waarbij

$\tau$  : hulpvariabele tijd (s)

De vergelijking voor de toenemende tak van de afvoerkromme is dan:

$$q = p \frac{p}{(1+k(t-t_a))^2}$$

Zie voor het verloop van deze functie Afbeelding 1c.

Een tweede integratie van de start van de afvoer op  $t_a$  tot het einde van de regenval  $T$  levert dan de cumulatieve directe afstroming  $Q$  als functie van de cumulatieve regenval:

$$Q = pT - pt_a + \frac{p}{k(1+k(T-t_a))} - \frac{p}{k}$$

Deze vergelijking is gelijk aan de curve-number vergelijking, wanneer  $p/k$  gelijkgesteld wordt aan  $S$ :

$$Q = P - I_a - S \left( 1 - \frac{S}{S + P - I_a} \right)$$

waarbij ook aangenomen wordt dat  $P = pT$  (de totale hoeveelheid regen) en  $I_a = pt_a$  (het initiële verlies). Hierbij is aangenomen dat alleen tijdens de bui directe afstroming gegenereerd wordt.

Gegeven deze veronderstellingen is de maximale bergingsindex  $S$  alleen constant als  $pT^*$  dat ook is. Dat betekent dat de karakteristieke tijd voor een stroomgebied ( $T^*$ ) direct proportioneel moet zijn met  $1/p$ . Gelet op de processen die tot directe afstroming kunnen leiden en hun ruimtelijk heterogeniteit in een stroomgebied zou dat eerder toeval zijn.

De curve-number vergelijking, de toenemende tak van de afvoergolf, en de daarbij horende ogenblikkelijke eenheidsafvoergolf is op deze manier in te passen in de theorie van lineaire systemen. Voorbeelden daarvan zijn een enkel lineair reservoir, en uitbreidingen daarvan, een reeks verbonden reservoirs. De analyse begint dan bij een ogenblikkelijke eenheidsafvoergolf, en leidt tot de vergelijking van de toenemende tak van de afvoergolf. Voor buien van on-eindige duur wordt het resultaat de  $S$ -curve genoemd. Door integratie van de afvoergolf van het begin van de afvoer ( $t_a$ ) tot de duur van de regenbui ( $T$ ) over de duur van de regenbui kan de cumulatieve afvoer als functie van de regenval afgeleid worden. De cumulatieve directe afstroming van bijvoorbeeld een enkel lineair reservoir uitgaande van de ogenblikkelijke eenheidsafvoergolf (zie Afbeelding 1b),

$$h_1(t) = k_1 e^{-k_1 t}$$

levert via convolutie met een constante intensiteit de toenemende tak van de afvoergolf (zie Afbeelding 1c)

$$q = p(1 - e^{-k_1(t-t_a)})$$

Een verdere integratie over de start van de afstroming  $t_a$  tot de duur van de regenval T resulteert dan in de vergelijking voor cumulatieve afvoer:

$$Q = P - I_a - S' \left( 1 - S' e^{-\frac{(P-I_a)}{S}} \right) \text{ voor } P \geq I_a, \text{ anders } Q = 0$$

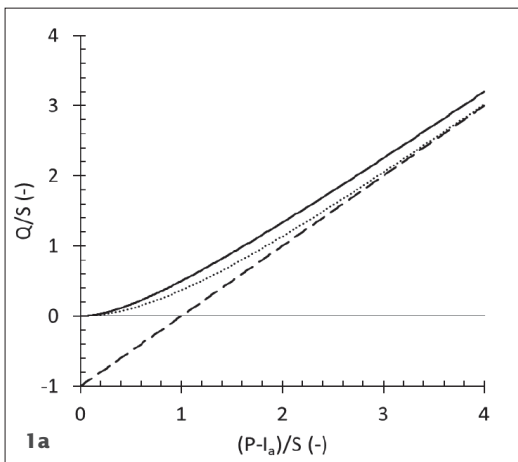
met  $S' = \frac{p}{k_f}$ .

waarbij

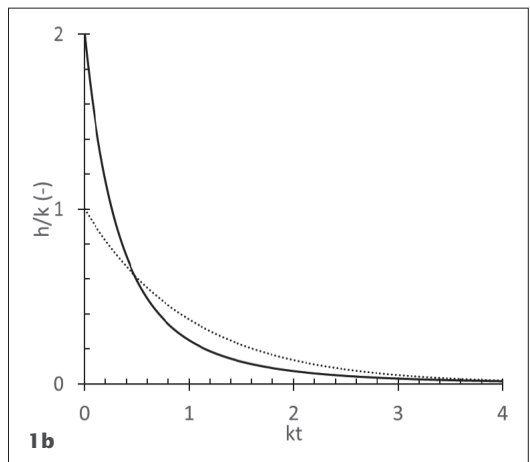
$S'$  : maximale bergingsindex voor een stroomgebied als lineair reservoir

$k_f$  : reactiefactor van het lineaire reservoir (1/s)

Deze vergelijking lijkt qua gedrag op de curve-number vergelijking, maar convergeert sneller naar dezelfde asymptoot (zie Afbeelding 1a)

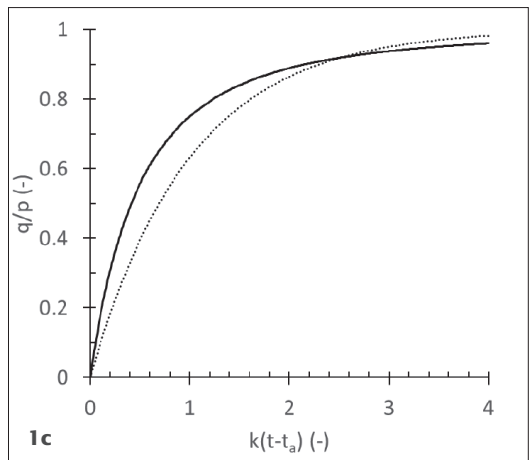


**Afbeelding 1a:** Geschaalde cumulatieve afvoer als functie van geschaalde regenval.



**Afbeelding 1b:** Geschaalde ogenblikkelijke eenheidsafvoergolf als functie van geschaalde tijd.

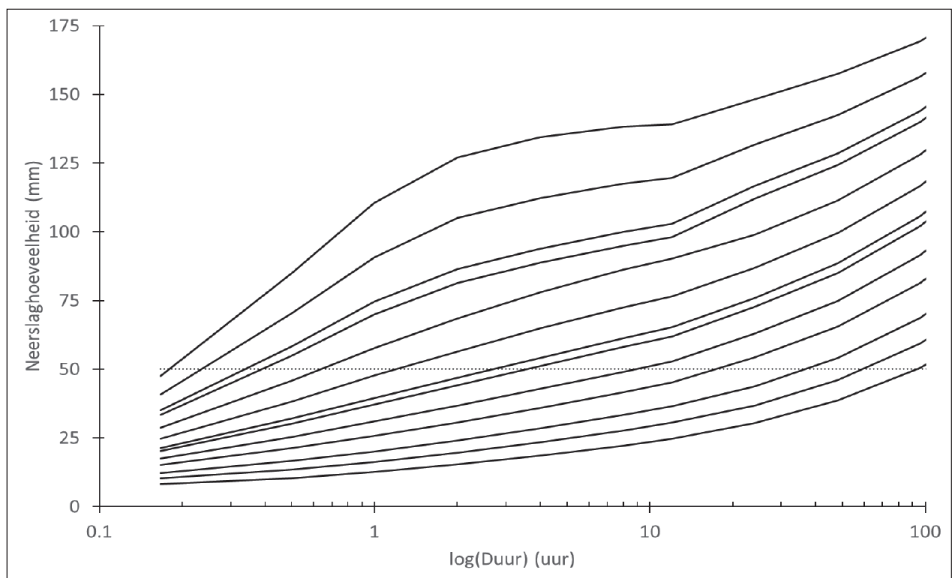
**Afbeelding 1c:** Geschaalde afvoer als functie van geschaalde tijd.



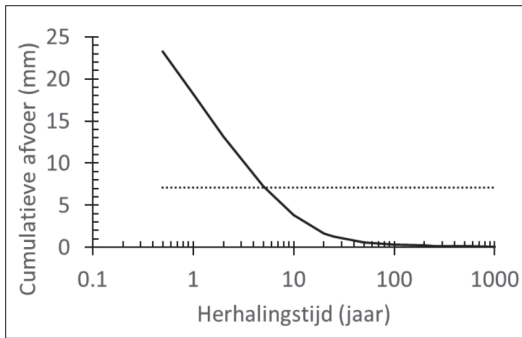
Doorgetrokken lijn voor curve number, gestippelde lijn voor lineair reservoir, onderbroken lijn voor asymptoot (in 1a).

## Mogelijke consequenties

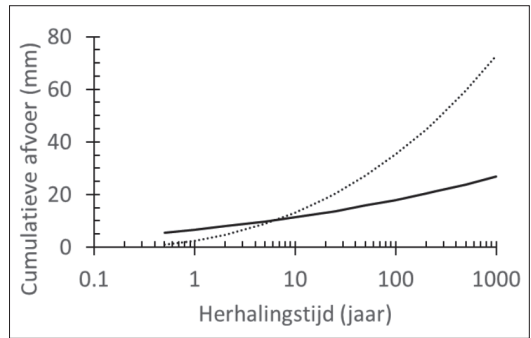
De bergingsindex  $S$  en de karakteristieke tijdsconstante  $k$  kunnen niet beiden constant zijn, gesteld dat  $S=p/k$ , en gegeven de variatie van de intensiteit van bui tot bui. Wat zijn de consequenties voor de berekende afvoer als  $k$ , in plaats van  $S$ , constant is? De afvoer is volgens de vergelijking met constante  $k$  afhankelijk van duur en intensiteit van een regenbui; bij de curve-number vergelijking met constante  $S$  is dat niet het geval. De regenduurlijnen voor het Nederlands klimaat (Beersma e.a., 2019) bij verschillende herhalingstijden zijn gepresenteerd in Afbeelding 2. De afbeelding laat zien dat een totale neerslag van bijvoorbeeld 50 mm bij verschillende combinaties van duur en herhalingstijd tot stand kan komen. De duur en de gemiddelde intensiteit voor deze regenbui van 50 mm is vervolgens bij verschillende herhalingstijden door lineaire interpolatie geschat. Via numerieke optimalisatie is de combinatie van  $1/k$  en  $t_a$  bepaald die het gedrag van de curve-number vergelijking bij een CN van 72 het beste benadert ( $1/k=108$  uur,  $t_a=0$ ). De berekende cumulatieve afvoeren voor de vergelijking op basis van  $k$  en  $t_a$  zijn in Afbeelding 3a weergegeven. Voor een CN-getal van 72 ( $S$  is dan ongeveer 100 mm) wordt bij gebruik van de curve-number vergelijking steeds 7 mm afgevoerd. Zoals Afbeelding 3a laat zien, neemt bij constante  $k$  de cumulatieve afvoer als functie van de herhalingstijd af. Een andere vraag is: wat gebeurt er bij dezelfde duur bij een toenemende intensiteit? De totale regenval neemt dan toe, dus de curve-number vergelijking zal een toenemende cumulatieve afvoer laten zien. Dat gebeurt ook bij de vergelijking met constante  $k$ , alleen is de toename veel minder sterk (zie figuur 3b).



**Afbeelding 2:** Regenduurlijnen voor verschillende herhalingstijden (bovenste 1000 jaar, onderste 0,5, voor tussenstappen zie Tabel 1. De neerslaghoeveelheid is hier voor de duidelijkheid uitgezet tegen  $\log_{10}$  van de duur. Bij de verschillende herhalingstijden is steeds een neerslaghoeveelheid van 50 mm (gestippelde lijn) mogelijk. De duur waarbij die waarde bereikt wordt, is gegeven in Tabel 1.



**Afbeelding 3a:** Cumulatieve afvoer als functie van herhalingstijd voor  $k$  constant (doorgetrokken lijn) en  $S$  constant (stippellijn) voor steeds dezelfde neerslaghoeveelheid (50 mm), bij veranderende duur.



**Afbeelding 3b:** Cumulatieve afvoer als functie van herhalingstijd voor  $k$  constant (doorgetrokken lijn) en  $S$  constant (stippellijn) voor steeds dezelfde neerslagduur (24 uur), bij veranderende neerslaghoeveelheid.

**Table 1:** Bij de verschillende herhalingstijden is de duur waarbij een neerslaghoeveelheid van 50 mm bereikt wordt via interpolatie uitgerekend, gebruikmakend van de data in Beersma e.a. (2019)

Herhalingstijd (jaar)	Duur (uur)	Herhalingstijd (jaar)	Duur (uur)
0.5	94.4	50	1.26
1	62.4	100	0.68
2	38.6	200	0.42
5	18.4	250	0.38
10	9.0	500	0.27
20	3.7	1000	0.19
25	2.9		

## Discussie

Wat betekent voorgaande verhandeling voor de Nederlandse praktijk? De curvenummermethode is onderdeel van een softwarepakket toegepast door waterschappen (SOBEK-RR, Prinsen e.a., 2009), wordt gebruikt in een Europese landelijke context (bijvoorbeeld PRZM-TOXSWA, Adriaanse e.a., 2017), of in een internationale stedelijke context (SWMM, Huong en Pathirana, 2013). De maximale bergingsindex  $S$  is dan één van de vele parameters, en de parameter  $I_a$  wordt op basis daarvan berekend. De gepresenteerde afleiding laat zien dat men erop bedacht moet zijn dat een effect van regenintensiteit en regenduur op pesticidetransport of stedelijke afvoer door het gebruik van een constante waarde voor  $S$  uit het zicht verdwijnt. De voorbeelden laten ook zien dat de aanname  $S$  constant, of  $k$  constant vooral bij hetzelfde neerslagtotaal, maar bij verschillende herhalingstijden, duidelijk verschillende cumulatieve afvoeren opleveren. De aanname dat  $k$  voor een stroomgebied constant is, is onzeker, en daarmee zijn de in de voorbeelden uitgewerkte consequenties dat ook. Een overzicht van vergelijkingen (Kaufman-Almeida e.a., 2022) om de karakteristieke stroomgebiedstijd ( $k$ ) te schatten geeft aan dat  $k$  varieert met een macht  $c$  van de intensiteit ( $k=ap^c$ ) met  $c$  tussen 0 en 0.4, en via de empirische parameter  $a$  afhangt van andere stroomgebiedseigenschappen (zoals helling en thalweglengte). Ondanks deze onzekerheid zijn er voor de karakteristieke tijd

van een stroomgebied ook theoretisch af te leiden vergelijkingen, zie bijvoorbeeld Brutsaert (2013). Dezelfde onzekerheid is er ook over de waarde van  $S$ , zie bijvoorbeeld ASCE (2009). Dit doet denken aan de variabele waarde van de bergingscoëfficiënt in grondwatersystemen (zie bijvoorbeeld Dingman, 2008). De keuze voor ingewikkeldere modellen ligt dan voor de hand. Zo kan  $S$  ook als een dynamische berging uitgewerkt worden, waarbij Michel e.a. (2005) de noodzaak aangeven om de vergelijking te wijzigen en een initiële waarde voor de berging te introduceren. Wel zou in de praktijk van het hydrologie-onderwijs, de curve-numbermethode onderdeel kunnen (of moeten?) worden van de analyse van afvoergolven via de convolutie van regenvalintensiteit met de ogenblikkelijke eenheidsafvoergolf, in dit geval een kubisch-reciproke functie.

## Conclusie

Het is mogelijk om de curve-number vergelijking op basis van een ogenblikkelijke eenheidsafvoergolf en een bui met een constante intensiteit af te leiden. De in de curve-number vergelijking gebruikte parameter  $S$  is dan een functie van de intensiteit van de regenval  $p$  en een voor het stroomgebied karakteristieke tijdsconstante  $1/k$ . Veronderstellen van een constante  $k$  met variabele intensiteit levert een ander stroomgebiedsgedrag op dan het gebruik van de oorspronkelijke vergelijking met constante  $S$ .

## Literatuur

- Adriaanse, P.I., R.C. van Leerdam en J.T.I. Boesten** (2017) The effect of the runoff size on the pesticide concentration in runoff water and in FOCUS streams simulated by PRZM and TOXSWA; in *Science of the total environment*, vol 217(584), pag 268-281.
- ASCE** (2009). Curve Number Hydrology: State of the Practice; redactie R.H. Hawkins, T.J. Ward, D.E. Woodward en J.A. Van Mullem, ASCE, Reston, VA, 106 pags.
- Beersma, J., H. Hakvoort, R. Jilderda, A. Overeem en R. Versteeg** (2019) Neerslagstatistiek en-reeksen voor het waterbeheer 2019, STOWA, rapport 2019-19.
- Brutsaert, W.** (2013) Hydrology, An introduction, Cambridge university press, New York, 8<sup>e</sup> druk.
- Dingman, S.L.** (2008) Physical hydrology, Waveland press, Long Grove, IL, 646 pags.
- Garen, D.C. en D.S. Moore** (2005) Curve number hydrology in water quality modeling: uses, abuses, and future directions; in *JAWRA Journal of the American Water Resources Association*, vol 41(2), pag 377-388.
- Hoosyar, M. en D. Wang** (2016) An analytical solution of Richards equation providing physical basis of SCS curve number method and its proportionality relationship, in *Water resources research* 52: 6611-6620
- Huong, H.T.L. en A. Pathirana** (2013) Urbanization and climate change impacts on future urban flooding in Can Tho city, Vietnam; in *Hydrology and Earth System Sciences* jrg 17, vol 1, pag 379-394.
- Kaufmann-Almeida, A., I. Kaufmann de Almeida, J.A. Guarienti, en S. Garcia Gabas**, (2022) The time of concentration. Application in studies around the world: a review; in *Environmental Science and Pollution Research* vol 29, pag 8126-8172.

**Metselaar, K.** (2023) The NRCS curve number equation derived from an instantaneous unit hydrograph: Some consequences; in *Journal of Hydrology X* 19 100151.

**Michel, C., V. Andréssian en C. Perrin** (2005) Soil Conservation Service Curve Number method: How to mend a wrong soil moisture accounting procedure?; *Water Resources Research*, jrg 41, vol 2, 02011.

**Mishra, S.K., V.P. Singh** (2003) Soil conservation service curve number (SCS-CN) methodology; Water science and Technology library volume 42, Kluwer, Dordrecht.

**Prinsen, G., H.A.M. Hakvoort en R. Dahm** (2009) Neerslag-Afvoermodellering met SOBEK-RR; in *Stromingen*, jrg 14, vol 4, pag 6-22.

**Ritzema, H.P.** (2006) Drainage principles and applications; ILRI, International Institute for Land Reclamation and Improvement, Wageningen.

**Steenhuis, T. S., M. Winchell, J. Rossing, J.A. Zollweg en M.F. Walter** (1995) SCS runoff equation revisited for variable-source runoff areas. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 121(3), 234-238.

## Summary Curve Number Derived From an Instantaneous Unit Hydrograph

*The curve number equation is derived assuming an instantaneous unit hydrograph, an initial abstraction, and a constant rainfall intensity. The derivation shows that the curve number equation is part of a family of single parameter instantaneous unit hydrographs, such as the linear reservoir, which when convoluted with the rainfall intensity yield the rising branch of a hydrograph. The resulting reformulation allows to incorporate the effect of rainfall intensity in the calculation of the cumulative discharge. This results in a different cumulative discharge notably for the same total rainfall at different recurrence intervals.*

### Auteurs

KLAAS METSELAAR  
Wageningen universiteit  
[Klaas.Metselaar@wur.nl](mailto:Klaas.Metselaar@wur.nl)